

Arithmétique partie I

[D] Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Alors : « a **divise** b » signifie « il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $b = k \times a$ » ; « a divise b » se note « $a|b$ ».

► $a|b \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$

[i] On écrit : $a|b \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$.

Lorsque $a|b$ on dit aussi que a **est un diviseur de** b ou encore que b **est un multiple de** a .

A01 Écrire une égalité pour justifier ...

• justifier que : $5 | (-15)$

On a : $-15 = (-3) \times 5$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $-15 = k \times 5$, à savoir $k = -3$, donc $5 | (-15)$

• justifier que : $(-8) | (-32)$

On a : $-32 = 4 \times (-8)$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-32 = k \times (-8)$, à savoir $k = 4$, donc $(-8) | (-32)$

• on sait que $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ et $x = 7y$, quelles affirmations peut-on en déduire parmi : $x|y$, $y|x$, $x|7$, $7|x$, $7|y$, $y|7$?
 $y|x$ et $7|x$

• un élève affirme : « $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}$, on a : $a + b|a^2 - b^2$ », si cette affirmation est vraie la démontrer, sinon en donner un contre-exemple.

On a : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = k \times (a + b)$ avec $k = a - b$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a^2 - b^2 = k \times (a + b)$, donc : $a + b|a^2 - b^2$

[P] Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a : $1|a$, $(-1)|a$, $a|a$ et $(-a)|a$.

A02 Démontrer la propriété précédente.

$a = 1 \times a$ montre que $1|a$ et que $a|a$

$a = (-1) \times (-a)$ montre que $(-1)|a$ et que $(-a)|a$

[P] Le cas particulier de 0

Tout entier relatif divise 0 : $\forall a \in \mathbb{Z}, a|0$, en particulier : $0|0$.

► si $a \neq 0$, alors 0 ne divise pas a : $a \neq 0 \Rightarrow \text{non } (0|a)$

A03 Démontrer la propriété précédente.

• soit $a \in \mathbb{Z}$, on a : $0 = 0 \times a$, donc : $a|0$

• soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $0|a$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k \times 0$, or $k \times 0 = 0$, donc : $a = 0$; on a montré que : si $0|a$, alors $a = 0$, autrement dit : $0|a \Rightarrow a = 0$. En prenant la contraposée, on obtient : $\text{non } (a = 0) \Rightarrow \text{non } (0|a)$, ce qui s'écrit aussi : $a \neq 0 \Rightarrow \text{non } (0|a)$.

[P] Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, on a les équivalences :

► $b|a \Leftrightarrow (-b)|a \Leftrightarrow b|(-a) \Leftrightarrow (-b)|(-a)$

A04 Démontrer la première équivalence.

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

• montrons que : $b|a \Rightarrow (-b)|a$

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $b|a$.

On a : $b|a$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = k \times b$, qui s'écrit aussi : $a = (-k) \times (-b)$.

Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = k' \times (-b)$, à savoir $k' = -k$, donc $(-b)|a$.

• montrons que : $(-b)|a \Rightarrow b|a$

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que : $(-b)|a$.

On a : $(-b)|a$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = k \times (-b)$, qui s'écrit aussi : $a = -kb$ ou encore $a = (-k) \times b$.

Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = k' \times b$, à savoir $k' = -k$, donc $b|a$.

Conclusion

On a montré que $b|a \Rightarrow (-b)|a$ et $(-b)|a \Rightarrow b|a$, donc on a l'équivalence : $b|a \Leftrightarrow (-b)|a$.

[D] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2}$.

[P] Soient x et y deux réels, on a :

- $|x| \geq 0$
- $|0| = 0$
- si $x \geq 0$ alors $|x| = x$
- $|x \times y| = |x| \times |y|$
- $|-x| = |x|$
- $|1| = |-1| = 1$
- si $x < 0$ alors $|x| = -x$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

A05 Démontrer chacun des points de la propriété précédente.

Soient x et y deux réels.

- **montrons que : $|x| \geq 0$**

Le résultat d'une racine carrée est un réel positif ou nul donc : $\sqrt{x^2} \geq 0$, autrement dit : $|x| \geq 0$.

conclusion : $|x| \geq 0$.

- **montrons que : $|-x| = |x|$**

On a : $|-x| = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{(-1 \times x)^2} = \sqrt{(-1)^2 \times x^2} = \sqrt{x^2} = |x|$.

conclusion : $|-x| = |x|$.

- **montrons que : $|0| = 0$**

On a : $|0| = \sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$.

conclusion : $|0| = 0$.

- **montrons que : $|1| = |-1| = 1$**

$|1| = \sqrt{1^2} = \sqrt{1} = 1$ et $|-1| = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

conclusion : $|1| = 1$.

- **montrons que : si $x \geq 0$ alors $|x| = x$**

Supposons $x \geq 0$, $|x| = \sqrt{x^2} = x$ (par définition de $\sqrt{}$).

conclusion : si $x \geq 0$ alors $|x| = x$.

- **montrons que : si $x < 0$, alors $|x| = -x$**

Supposons $x < 0$, alors $-x > 0$ et on a :

$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$ (d'après le point précédent).

conclusion : si $x < 0$, alors $|x| = -x$.

- **montrons que : $|x \times y| = |x| \times |y|$**

$$|x \times y| = \sqrt{(x \times y)^2} = \sqrt{x^2 \times y^2} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{y^2} = |x| \times |y|$$

conclusion : $|x \times y| = |x| \times |y|$.

- **montrons que : $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$**

si $x = 0$ alors $|x| = |0| = 0$ donc on a l'implication $x = 0 \Rightarrow |x| = 0$

si $|x| = 0$ montrons que $x = 0$. Procédons par disjonction de cas :

1^{er} cas $x \geq 0$

$x \geq 0$ donc $|x| = x$, par conséquent l'égalité : $|x| = 0$ devient $x = 0$

2^e cas : $x < 0$

$x < 0$ donc $|x| = -x$, par conséquent l'égalité : $|x| = 0$ devient

$-x = 0$, ou encore $x = 0$ qui est à rejeter (on est dans le cas $x < 0$)

conclusion : $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

[P] ► Tout diviseur positif de $a \neq 0$ est compris au sens large entre 1 et $|a|$: $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ d \in \mathbb{N} \text{ et } d|a \end{cases} \Rightarrow 1 \leq d \leq |a|$.

A06 Démontrer la propriété précédente.

Soit $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{N}$ tel que $d|a$, démontrons que : $1 \leq d \leq |a|$.

On a $d|a$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k \times d$ (*).

- **Montrons que $1 \leq d$**

Supposons $d = 0$, alors d'après (*) : $a = k \times 0 = 0$, ce qui contredit la donnée $a \neq 0$, donc il faut rejeter la supposition $d = 0$, or d est un entier naturel donc $d \in \mathbb{N}^*$, par conséquent : $1 \leq d$.

- **Montrons que $d \leq |a|$**

Il résulte de (*) que : $|a| = |k \times d| = |k| \times |d| = |k| \times d$ (**),

Supposons $|k| = 0$, alors (**) montre que : $|a| = 0 \times d = 0$,

donc $|a| = 0$, ce qui contredit la donnée $a \neq 0$, donc il faut rejeter la supposition $|k| = 0$, or $|k|$ est un entier naturel donc $|k| \geq 1$.

On a : $1 \leq |k|$, puis en multipliant par $d > 0$: $1 \times d \leq |k| \times d$,

c'est-à-dire : $d \leq |a|$.

A07 Un élève dit « si $a \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$ et $d|a$, alors $1 \leq d \leq |a|$ ».

Trouver l'erreur.

On a : $0 = 6 \times 0$, donc $6|0$, mais « $1 \leq 6 \leq |0|$ » est faux.

Ce contre-exemple montre que l'affirmation de l'élève est **fausse**.

Il a oublié la condition $a \neq 0$, elle est nécessaire.

A08 Donner sans justification les diviseurs de (-15) .

Les diviseurs positifs de (-15) sont compris entre 1 et $|-15| = 15$.

Diviseurs positif de (-15) : 1, 3, 5, 15. On en déduit que les diviseurs de (-15) sont : $-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5$ et 15.

A09 Démontrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$: $4|(a+b)^2 - (a-b)^2$.

Soient a et b deux entiers relatifs, on a :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - (a-b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^2 + 2a + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab\end{aligned}$$

Résumons : $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4k$, à savoir $k = ab$, donc : $4|(a+b)^2 - (a-b)^2$.

A10 A-t-on « $\forall n \in \mathbb{N}, 3|2^n + 2^{n+1}$ ».

On peut commencer par tester quelques valeurs de n :

• $n = 0$

$$2^0 + 2^{0+1} = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3 = 1 \times 3, \text{ donc : } 3|(2^0 + 2^{0+1})$$

• $n = 1$

$$2^1 + 2^{1+1} = 2^1 + 2^2 = 2 + 4 = 6 = 2 \times 3, \text{ donc : } 3|(2^1 + 2^{1+1})$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons que : $3|(2^n + 2^{n+1})$.

$$\text{On a : } 2^n + 2^{n+1} = 2^n \times 1 + 2^n \times 2 = 2^n(1 + 2) = 2^n \times 3.$$

$2^n + 2^{n+1} = 2^n \times 3$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^n + 2^{n+1} = k \times 3$, à savoir $k = 2^n$, donc : $3|2^n + 2^{n+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 3|2^n + 2^{n+1}$.

A11 Que penser de l'affirmation d'un élève « la somme de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 3 » ?

On se donne trois entiers relatifs consécutifs, en notant a le plus petit d'entre eux les deux autres sont $a+1$ et $a+2$.

$$\text{On a : } a + (a+1) + (a+2) = 3a + 3 = 3(a+1).$$

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a + (a+1) + (a+2) = 3k$, à savoir $k = a+1$, donc : $3|a + (a+1) + (a+2)$.

L'affirmation de cet élève est exacte.