

ACTIVITES 12. Fonction trigonométrique

[F] Rappels

- la **fonction cosinus** $x \mapsto \cos(x)$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- la **fonction sinus** $x \mapsto \sin(x)$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sin(x))' = \cos(x)$
- si u est dérivable sur un intervalle I , alors $\sin u$ et $\cos u$ sont dérivables sur I et on a :

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

- la fonction **cosinus** est **paire** et la fonction **sinus** est **impaire**, c'est-à-dire que pour tout réel x :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

dans un **repère orthogonal** la courbe représentative de la fonction **cosinus** est symétrique par rapport à l'**axe des ordonnées** du repère,

dans un repère quelconque la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'**origine du repère**

- pour tout réel x , on a :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

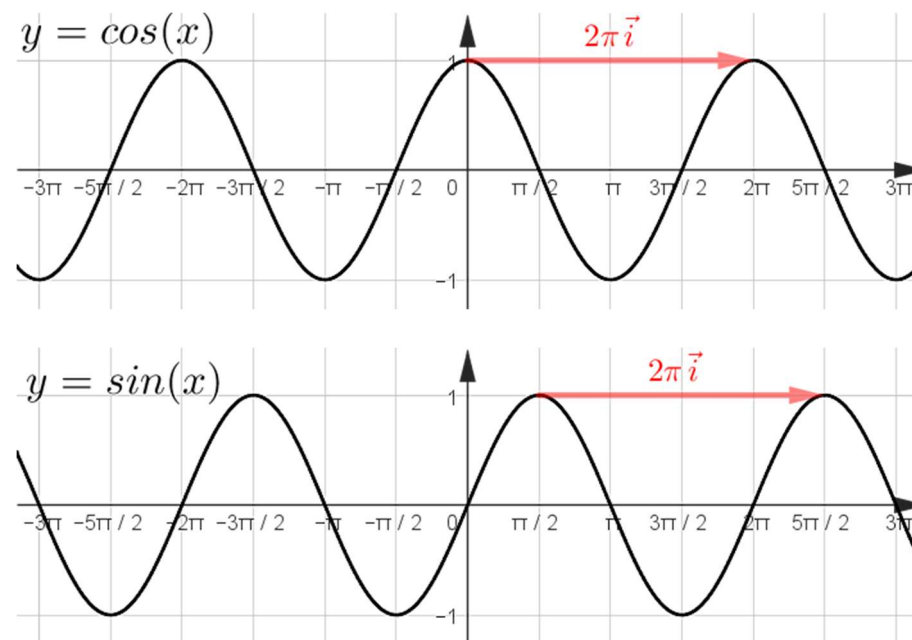
on dit que les fonctions cosinus : $x \mapsto \cos(x)$ et sinus $x \mapsto \sin(x)$ sont **périodiques** de période 2π ou encore qu'elles sont **2π -périodiques** : connaître leur courbe représentative sur un intervalle de longueur 2π suffit pour en déduire par **translation de $2k\pi$** , $k \in \mathbb{Z}$, leur courbe représentative sur $\mathbb{R}$

- tableau de variation sur $[0; \pi]$**

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\searrow$ 0	$\searrow$ -1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\nearrow$ 1	$\searrow$ 0

- courbes représentatives**



[F] Équations trigonométriques

- pour résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme $\cos(x) = \cos(a)$ ou $\sin(x) = \sin(a)$, on peut utiliser :
 $\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a [2\pi] \text{ ou } x = -a [2\pi]$
 $\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a [2\pi] \text{ ou } x = \pi - a [2\pi]$
- pour résoudre dans $[-\pi; \pi[$ ou $[0; 2\pi[$ une équation de la forme $\cos(x) = b$ ou $\sin(x) = b$, où b est une valeur remarquable du cosinus ou du sinus, le plus simple est d'utiliser le cercle trigonométrique

A01 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :

a. $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ b. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

rép : a. $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \right\}$

b. $\left\{ \frac{\pi}{30} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + k'\frac{2\pi}{5}, k' \in \mathbb{Z} \right\}$

A02 Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ chacune des équations :

a. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ b. $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

rép : a. $\{-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\}$ b. $\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$

[F] Tableau de signes et inéquations trigonométriques

Lorsque cela est nécessaire il faut savoir retrouver le tableau de signe de $\cos(x)$ et celui de $\sin(x)$ sur un intervalle donné de $\mathbb{R}$. Pour résoudre dans un intervalle de longueur 2π une inéquation dont un membre est $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ et l'autre une valeur remarquable du cosinus ou du sinus, le plus simple est d'utiliser le cercle trigonométrique.

A03 Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ chacune des inéquations :

a. $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$ b. $\sin(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Rep : a. $[-\pi; -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}; \pi]$ b. $[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$

[P] Limites

$x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ n'ont pas de limites en $-\infty$, ni en $+\infty$

A04 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x) + 3}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 2π -périodique.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Donner sans justification le signe de $\cos(x)$ sur $[0; 2\pi]$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[0; 2\pi]$.

rép

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(x)$	+	0	-	+
$-\cos(x)$	-	0	+	-
$(\sin(x) + 3)^2$	+	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+	-
Sens de variation de f	$\frac{1}{3}$ ↘	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$ ↗	$\frac{1}{3}$ ↘

A05 On considère la fonction f définie sur $[-\pi; \pi]$ par :

$$f(x) = 2 \sin(x) - x$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Montrer que f est impaire, en déduire une propriété de la courbe $\mathcal{C}$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Déterminer pour quelles valeurs de $x \in [0; \pi]$ on a $f'(x) > 0$.
4. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$.

rép

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
Sens de variation de f	0 ↗	$\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$	$-\pi$ ↘

A06C On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \sin(x)$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On admet que, pour tout réel x :

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$$

1. a. Etudier la parité de f , que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

b. Montrer que f est 2π -périodique.

Il résulte de a. et b. qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$.

2. Montrer que : $\forall x \in [0; \pi], f'(x) = (2 \cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)$.

3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse nulle.

4. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$, en déduire le tableau de variation de f sur cet intervalle.

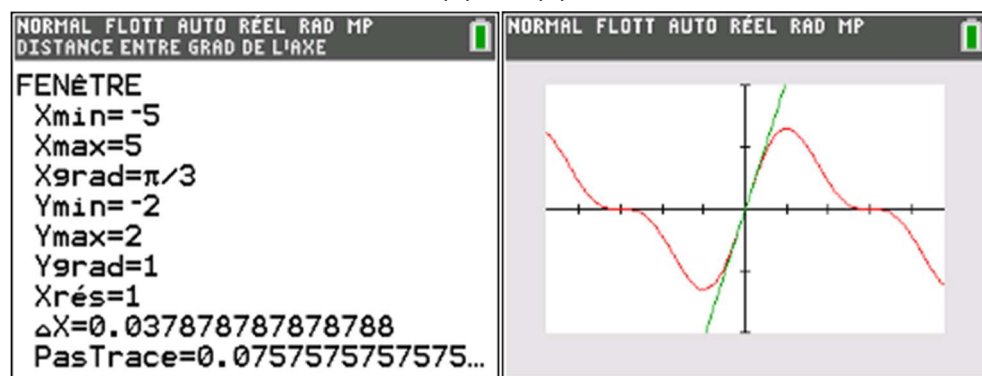
5. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0; \pi]$.

Corrigé

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \sin(x)$$

$\mathcal{C}$ courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Admis : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ et $\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$



1. a. Etudier la parité de f , que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

• $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{2}\sin(-2x) + \sin(-x) = -\frac{1}{2}\sin(2x) - \sin(x) \\ &= -\left[\frac{1}{2}\sin(2x) + \sin(x)\right] = -f(x) \end{aligned}$$

Résumons :

$\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à zéro et $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$ donc **f est impaire.**

On en déduit que sa courbe représentative **$\mathcal{C}$ admet l'origine du repère comme centre de symétrie.**

b. Montrer que **f est 2π -périodique.**

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \frac{1}{2}\sin(2(x + 2\pi)) + \sin(x + 2\pi) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x + 2 \times 2\pi) + \sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \sin(x) = f(x) \end{aligned}$$

Résumons : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = f(x)$ donc **f est 2π -périodique.**

Il résulte de a. et b. qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$.

2. Montrer que : $\forall x \in [0; \pi], f'(x) = (2 \cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)$.

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \sin(x)$$

Rappel : $(\sin(x))' = \cos(x)$ et $(\sin u)' = u' \cos u$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \cos(2x) + \cos(x)$$

$$f'(x) = \cos(2x) + \cos(x)$$

$$f'(x) = 2 \cos^2(x) - 1 + \cos(x)$$

$$f'(x) = 2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} (2 \cos(x) - 1)(\cos(x) + 1) &= 2 \cos^2(x) + 2 \cos(x) - \cos(x) - 1 \\ &= 2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1 \end{aligned}$$

donc : $\forall x \in [0; \pi], f'(x) = (2 \cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)$.

3. Équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse nulle.

La tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse nulle admet pour équation :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

Or,

$$f(0) = \frac{1}{2} \sin(2 \times 0) + \sin(0) = \frac{1}{2} \sin(0) + \sin(0) = 0 + 0 = 0$$

$$f'(0) = (2 \cos(0) - 1)(\cos(0) + 1) = (2 \times 1 - 1)(1 + 1) = 2$$

On obtient : $y = 2(x - 0) + 0$, c'est-à-dire : $y = 2x$.

Conclusion : **T admet pour équation $y = 2x$.**

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$, en déduire le tableau de variation de f sur cet intervalle.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2 \cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)$$

- Pour $x \in [0; \pi]$, on a les équivalences :

$$2 \cos(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow 2 \cos(x) > 1 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right[$$

- Pour $x \in [0; \pi]$, on a les équivalences :

$$\cos(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > -1 \Leftrightarrow x \neq \pi$$

On déduit des deux points précédents le tableau de variation :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$2 \cos(x) - 1$	+	0	-
$\cos(x) + 1$	+	0	+
$f'(x)$	+	0	-
sens de variation de f	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$f(\pi) = \frac{1}{2} \sin(2\pi) + \sin(\pi) = \frac{1}{2} \times 0 + 0 = 0$$

5. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0; \pi]$.

La fonction f est continue sur $[0; \pi]$, sa valeur moyenne sur cet intervalle est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi f(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \sin(2x) + \sin(x) \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{4} \times 2 \sin(2x) + \sin(x) \right) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{4} (-\cos(2x)) - \cos(x) \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{4} \cos(2x) - \cos(x) \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{4} \cos(2\pi) - \cos(\pi) + \frac{1}{4} \cos(0) + \cos(0) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{4} \times 1 - (-1) + \frac{1}{4} \times 1 + 1 \right) = \frac{1}{\pi} \times 2 = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Conclusion

La valeur moyenne de f sur $[0; \pi]$ est égale à : $\frac{2}{\pi}$.