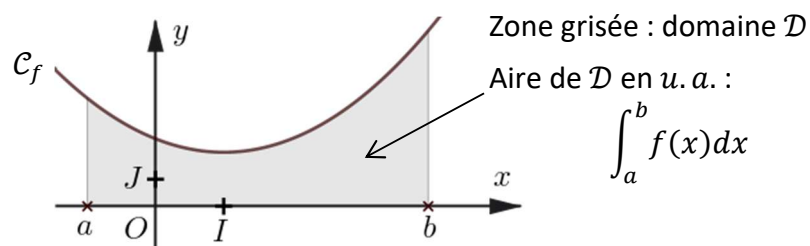


ACTIVITES 10. Calcul intégral

D quelques définitions

- le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, l'**unité d'aire** est l'**aire du rectangle OIKJ** où $K(1; 1)$
- une fonction f définie sur un intervalle I est **positive** sur cet intervalle lorsque, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$: la partie correspondante de $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessus** au sens large de l'axe des abscisses
- on définit de même une **fonction négative**, **strictement positive** et enfin **strictement négative** sur un intervalle
- pour f continue et positive sur $[a; b]$, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire s'appelle **intégrale** de f de a à b et elle se note $\int_a^b f(x) dx$:



On a donc :

$$\int_a^b f(x) dx \text{ (u. a.)} = \text{aire de } \mathcal{D}$$

Les réels a et b sont les **bornes de l'intégrale**, la lettre x est une **variable muette**, c'est-à-dire que son nom n'a aucune importance :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\theta) d\theta = \dots$$

On convient que :

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

A01 Déterminer :

$$\int_1^3 (x+1) dx$$

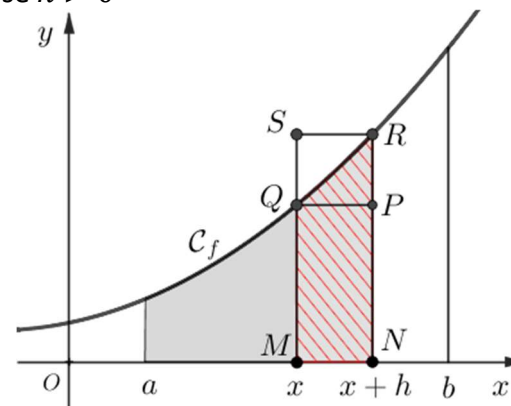
P Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a; b]$ par :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est l'**unique primitive de f sur $[a; b]$ s'annulant en a** , autrement dit : $\forall x \in [a; b], F'_a(x) = f(x)$ et $F_a(a) = 0$.

A02 On souhaite justifier le théorème fondamental dans le cas particulier où f est continue, positive et croissante sur $[a; b]$. Soit $x \in [a; b]$ et $h \neq 0$ tel que $x+h \in [a; b]$.

1. On suppose $h > 0$



a. Exprimer les aires des rectangles $MNPQ$ et $MNRS$ en fonction de h , $f(x)$ et $f(x+h)$.

b. En déduire que :

$$h \times f(x) \leq F_a(x+h) - F_a(x) \leq h \times f(x+h)$$

puis justifier que :

$$f(x) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x+h) \quad (*)$$

Pour $h < 0$, on montrerait de même que :

$$f(x+h) \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x) (**)$$

2. Déterminer :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \text{ et } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$$

En déduire que F_a est dérivable en x et que $F'_a(x) = f(x)$.

Interpréter ce résultat en terme de primitive, justifier que $F_a(a) = 0$ et conclure.

[i] On admet que ce résultat se généralise à toute fonction continue et positive sur $[a; b]$, non nécessairement croissante sur cet intervalle.

[F] Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle, alors :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

A03 [preuve] Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$. Pour tout $x \in [a; b]$, on pose :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

et on note F une primitive de f sur $[a; b]$.

1. Justifier qu'il existe une constante réelle k telle que :

$$\forall x \in [a; b], F(x) = F_a(x) + k$$

2. Montrer que : $k = F(a)$.

3. En déduire que pour tout $x \in [a; b]$, on a :

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

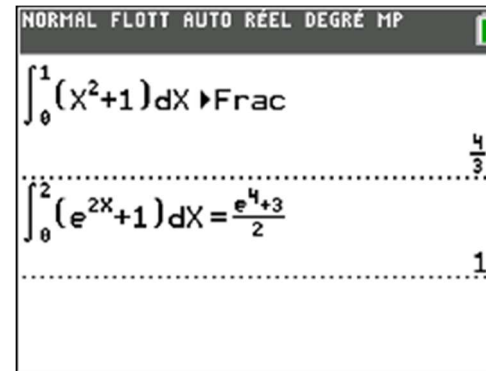
Ecrire cette égalité pour $x = b$, puis conclure.

4. Montrer que, si H est une autre primitive de f sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt = [H(x)]_a^b$$

A04 Calculer les intégrales :

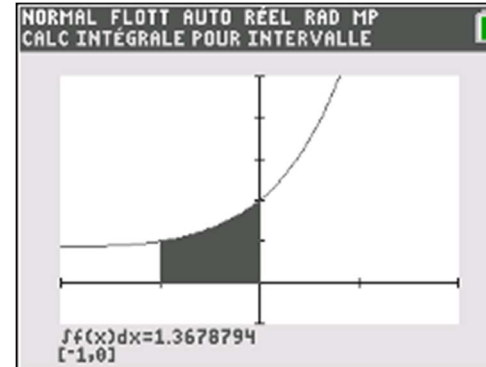
$$I = \int_0^1 x^2 + 1 dx \text{ et } J = \int_0^2 e^{2x} + 1 dx$$



1	Intégrale($x^2+1,0,1$) → $\frac{4}{3}$
2	Intégrale($\exp(2x)+1,0,2$) → $\frac{e^4+3}{2}$

A05 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^x + 1$ et $F(x) = xe^x + x$.

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, en déduire $\int_{-1}^0 f(x) dx$.



$\int_{-1}^0 (Y_1) dX = 1 + \frac{1}{e}$
$\int_{-1}^0 (Y_1) dX$
1.367879441

A06 Calculer les intégrales :

$$A = \int_{-1}^4 \pi dx \quad B = \int_{-1}^2 (x+3) dx \quad C = \int_0^1 (3x^2+x) dx$$

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x) dx \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx \quad \underline{\text{rép}} : A = 5\pi, B = \frac{21}{2}, C = \frac{3}{2}, D = \frac{\sqrt{3}}{2}, E = 1$$

A07 Calculer :

$$I = \int_1^3 3x(x^2 + 5)^2 dx \quad \text{rép} = 1\,264$$

[D] Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et F une primitive de f sur I , pour tous nombres a et b appartenant à I on appelle **intégrale de a à b de f** le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ défini par :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

[F] Soient f et g deux fonctions **continues** sur un intervalle I , a , b et c trois nombres appartenant à cet intervalle, λ est une constante réelle, alors :

$$(1) \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (2) \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$(3) \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

$$(4) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(5) \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$(6) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{relation de Chasles})$$

A08 Démontrer les six formules précédentes.

A09 Calculer $I + K$ et K , en déduire I .

$$I = \int_0^{\ln} \frac{1}{e^x + 1} dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\ln} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

A10 $\forall x \in [1; 5], f(x) = |x - 2|$, calculer :

$$I = \int_1^5 f(x) dx$$

rép :

$$I + K = \ln(2) \\ K = \ln\left(\frac{3}{2}\right), I = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

rép :

$$I = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$$

[F] Soient f et g deux fonctions **continues** sur un intervalle I , a et b des nombres appartenant à cet intervalle tels que $a \leq b$:

(7) si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ (positivité)

(8) si $f \geq g$ sur $[a; b]$, alors : $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

A11 Démontrons les affirmations (7) et (8).

- on suppose f continue et positive sur $[a; b]$, on note F une primitive de f sur cet intervalle ; déterminer le sens de variation de F sur $[a; b]$, en déduire l'inégalité (7)
- on suppose que f et g sont continues sur $[a; b]$ et que $f \geq g$ sur cet intervalle, à l'aide de (7), en déduire l'inégalité (8)

Attention

- si $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, alors on ne peut pas en déduire que f est positive sur $[a; b]$
- si $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$, alors on ne peut pas en déduire que $f \geq g$ sur $[a; b]$
- les relations d'ordre sont préservées en intégrant dans l'ordre **croissant** des bornes

A12

1. Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, on a :

$$-\frac{1}{2}x + 1 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

2. En déduire un encadrement de :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

[F] intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , dont les dérivées u' et v' sont continues sur I .

Alors pour tous nombres a et b appartenant à I , on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

A13 Démontrons la formule d'intégration par parties.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , dont les dérivées u' et v' continues sur I , a et b deux nombres appartenant à I .

1. Montrer que, pour tout $x \in I$: $(uv)'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x)$.

2. Calculer de deux façons différentes l'intégrale :

$$I = \int_a^b ((uv)'(x) - u'(x)v(x)) dx$$

puis conclure.

A14 À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$A = \int_0^1 xe^x dx \quad B = \int_0^1 (2x+1)e^x dx \quad C = \int_1^e \ln(x) dx$$

$$D = \int_1^e x \ln(x) dx \quad E = \int_0^1 xe^{-x} dx \quad F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx$$

A	B	C	D	E	F
1	$e+1$	1	$\frac{e^2+1}{4}$	$1-\frac{2}{e}$	$\frac{\pi}{2}-1$

A15 On se propose de calculer $I = \int_0^2 x^2 e^x dx$.

Méthode n°1 : effectuer une double intégration par parties.

Méthode n°2 : rechercher une primitive de $f : x \mapsto x^2 e^x$ sous la forme

$$F : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$$

[P] Calcul d'une aire

On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ dans un repère orthogonal :

• cas d'une fonction continue gardant un signe constant

– si f est continue et positive sur $[a; b]$, alors l'aire de $\mathcal{D}$ est :

$$\int_a^b f(x) dx \text{ u. a.}$$

– si f est continue et négative sur $[a; b]$, alors l'aire de $\mathcal{D}$ est :

$$-\int_a^b f(x) dx \text{ u. a.}$$

• cas d'une fonction changeant de signes

si f est continue et change de signe sur $[a; b]$, alors on découpe $[a; b]$ en sous-intervalles sur chacun desquels f garde un signe constant, puis on somme les aires relatives à chacun des sous-intervalles

• domaine situé entre deux courbes

si $f \geq g$ sur $[a; b]$ alors l'aire du domaine **délimité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$** est :

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ u. a.}$$

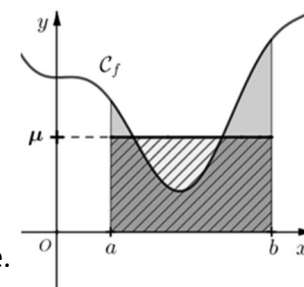
[D] Valeur moyenne

Soit f continue sur I , a, b appartenant à I , $a < b$, alors la **valeur moyenne** de f **sur $[a; b]$** est :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

[i] La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est notée : μ , ou μ_f , ou $\mu_{f,a,b}$ lorsqu'un risque de confusion existe.

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, si f est continue et positive sur $[a; b]$, alors la valeur moyenne μ est la hauteur du rectangle de base $[a; b]$ ayant même aire que le domaine $\mathcal{D}$ du plan délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$: le domaine grisé et le rectangle hachuré ont même aire.



A16 Déterminer la valeur moyenne de f sur $[-1; 3]$ avec :

$$\forall x \in [-1; 3], f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

A17 Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0; \pi]$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x) + 1$$

[P] (admise) Soit f une fonction continue sur un intervalle I , alors :

• si f est **paire** :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

• si f est **impaire** :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

méthode des rectangles

Si f est continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, on partage $[a; b]$

en n sous intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ de même largeur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, avec

$$x_k = a + k \times \Delta x, k \in \{0; 1; \dots; n-1\}.$$

Sur chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, l'aire du domaine situé sous $\mathcal{C}_f$ est « proche » de l'aire du rectangle de base $[x_k, x_{k+1}]$ et de hauteur $f(x_k)$, l'aire de ce rectangle étant égale à $f(x_k) \times \Delta x$, on en déduit que l'aire du domaine situé entre $\mathcal{C}_f$, (Ox) et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est proche de :

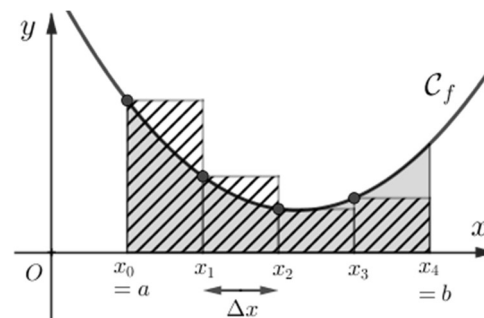
$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x$$

(admis) Lorsque $n \rightarrow +\infty$, cette somme converge vers l'aire de $\mathcal{D}$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x$$

Cette remarque est à l'origine de la notation $\int_a^b f(x) dx$, le symbole $\int$ ressemblant à la première lettre du mot latin «summa». (figure ci-après...)

figure méthode des rectangles dans le cas $n = 4$:

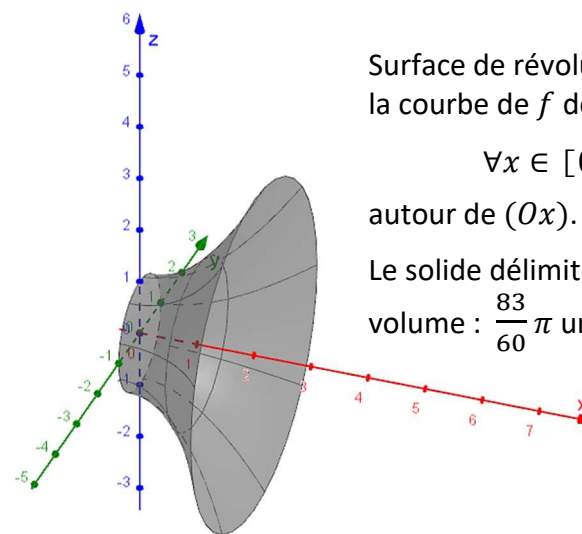


Volume d'un solide de révolution

Une surface de l'espace est obtenue par révolution autour de l'axe des abscisses de la courbe représentative d'une fonction f continue et positive sur $[a; b]$.

Le volume du solide délimité par cette surface est :

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \text{ u. v.}$$



Surface de révolution obtenue par rotation de la courbe de f définie par :

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$$

autour de (Ox) .

Le solide délimité par cette surface a pour volume : $\frac{83}{60} \pi$ unité de volume.