

ACTIVITES 09. Primitive et équation différentielle

[D] Soient f une fonction définie sur I et F une fonction **dérivable** sur le même intervalle I , alors : F est **une primitive** de f sur $I \iff F' = f$ sur I autrement dit : $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

[P] Soit I un intervalle :

- ▶ si f est dérivable sur I et f' est nulle sur I , alors f est constante sur I
 $\forall x \in I, f'(x) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = k$
 (la réciproque est évidemment vraie)
- ▶ une fonction **continue** sur I admet une infinité de primitives sur I et deux d'entre elles diffèrent d'une constante additive :
 si F et G sont **deux primitives** de f sur I ,
 alors $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I, G(x) = F(x) + k$

A01 Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x + 3, g(x) = e^{-x} + 5, h(x) = \frac{2x}{x^2 + 5}$$

A02 Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x \ln(x) - x$.
 Montrer que g est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

A03 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - 3x^2$, déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$ puis la primitive F_0 de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F_0(1) = 5$.

[F] Soit I un intervalle, f une fonction continue sur I de primitive F sur I , g une fonction continue sur I de primitive G sur I , λ et k des constantes réelles, alors :

- une **primitive de $f + g$** est de la forme $F + G + k$, avec $k \in \mathbb{R}$
- une **primitive de $f - g$** est de la forme $F - G + k$, avec $k \in \mathbb{R}$
- une **primitive de $\lambda \times f$** est de la forme $\lambda \times F + k$, avec $k \in \mathbb{R}$

[D] Lorsque F est une primitive de f sur I on dit parfois plus qu'une primitive de l'expression $f(x)$ est l'expression $F(x)$.

[F] Soient a et k deux constantes réelles, n un entier naturel, alors :

- une primitive de a est de la forme $x \mapsto ax + k$
- une primitive de 0 est de la forme $x \mapsto k$
- une primitive de x^n est de la forme $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
- une primitive de x est de la forme $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + k$

A04 Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$:

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 5x + 7$
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 5)^2$

[F]

- une primitive de x^n est de la forme $\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ avec $n \leq -2$
 (sur $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$)
- une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est de la forme $2\sqrt{x} + k$ (sur $] 0; +\infty[$)
- une primitive de e^x est de la forme $e^x + k$ (sur $\mathbb{R}$)
- une primitive de e^{-x} est de la forme $-e^{-x} + k$ (sur $\mathbb{R}$)
- une primitive de $\sin(x)$ est de la forme $-\cos(x) + k$ (sur $\mathbb{R}$)
- une primitive de $\cos(x)$ est de la forme $\sin(x) + k$ (sur $\mathbb{R}$)
- une primitive de $u'u^n$ est de la forme $\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$ ($n \neq -1$)
- une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est de la forme $-\frac{1}{u} + k$

où k est une constante réelle

A05 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de f :

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1. $f(x) = e^x - x^2$ | 2. $f(x) = 7\cos(x) + 5$ |
| 3. $f(x) = 2x(x^2 + 5)^4$ | 4. $f(x) = 7x^2(x^3 - 1)^2$ |
| 5. $f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^3}$ | 6. $f(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ |
| 7. $f(x) = \frac{5x}{(x^2 + 7)^2}$ | 8. $f(x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + 2)^2}$ |

[F] Soient a et b deux constantes, $a \neq 0$, u une fonction dérivable sur un intervalle I , alors :

- une primitive de e^{ax+b} est de la forme $\frac{1}{a}e^{ax+b} + k$
- une primitive de $u'e^u$ est de la forme $e^u + k$
(k est une constante réelle)

A06 Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1. $f(x) = e^{-x} + 3$ | 2. $f(x) = e^{4x-1}$ |
| 3. $f(x) = e^{-2x+1}$ | 4. $f(x) = xe^{x^2-1}$ |
| 5. $f(x) = 5xe^{-x^2+3}$ | 6. $f(x) = x^2e^{x^3+2}$ |

A07 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xe^x$; chercher une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto (ax + b)e^x$, en déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

[F] Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I :

- si $u > 0$ sur I , une primitive de $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ est $\sqrt{u} + k$
- une primitive de $u' \cos(u)$ est de la forme $\sin(u) + k$
- une primitive de $u' \sin(u)$ est de la forme $-\cos(u) + k$
(k est une constante réelle)

A08 Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de f :

- | | |
|--|----------------------------|
| 1. $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}$ | 2. $f(x) = 3 \cos(2x + 1)$ |
|--|----------------------------|

[F] Soit u une fonction dérivable et à valeurs strictement positives sur un intervalle I , alors : une primitive de $\frac{u'}{u}$ est de la forme $\ln(u) + k$
(k est une constante réelle)

A09 Déterminer les primitives sur l'intervalle I : de f définie par :

- | | |
|--|---|
| 1. $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}, I =]2; +\infty[$ | 2. $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3}, I = \mathbb{R}$ |
|--|---|

[D] Une **équation différentielle** du premier ordre sur un intervalle est une équation portant sur une fonction et sa dérivée première.
(lorsque cet intervalle est $\mathbb{R}$, on omet souvent de le préciser)

A10 On considère l'équation différentielle : $y' = 2y - 2x + 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $g(x) = e^{2x} + x$, $h(x) = e^{2x} + x + 1$:
Montrer que g est une solution de (E) , mais pas h .

Équation différentielle $y' = ay$, a constante

[D] $y' = ay$, ou encore $y' - ay = 0$, est une **équation différentielle homogène** à coefficients constants.

[F] Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle.

[i] Les solutions d'une équation différentielle homogène sont définies à une constante **multiplicative** près, non à une constante additive comme c'est le cas pour les primitives.

A11 Résoudre l'équation différentielle homogène $y' = -y$.

A12 On se propose de démontrer la formule précédente.
Soit a une constante réelle, on considère l'équation différentielle homogène $(E_0) : y' = ay$.

étape n°1

Soit C une constante et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$: vérifier que f est une solution de (E_0) .

Conclusion 1 : toute fonction $x \mapsto Ce^{ax}$ est une solution de (E_0) .

étape n°2

Soit f une solution de (E_0) et g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.
Démontrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = C$, en déduire $f(x)$.

Conclusion 2 : toute solution de (E_0) peut s'écrire $x \mapsto Ce^{ax}$

Il résulte des Conclusion 1 et 2 que les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante.

P $(E_0) : y' = ay$, alors :

- si y_1 et y_2 sont des solutions de (E_0) , alors la fonction $y_1 + y_2$ est une solution de (E_0)
- si k est une constante réelle et y une solution de (E_0) , alors ky est une solution de (E_0)

A13 Démontrer les deux points de la propriété précédente.

A14 Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y$.

A15 Donner sans rédiger la solution générale de : $y' + 2y = 0$.

A16 Déterminer la solution f de $y' = y$ telle que $f(1) = e^2$.

D L'équation différentielle $y' = ay + b$ ou $y' - ay = b$ est une **équation différentielle** à coefficients constants **avec second membre constant**.

F Soient a et b deux constantes, $a \neq 0$, les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où C est une constante réelle.

On dit aussi que la **solution générale** est $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.

A17 Démontrer la solution générale de $y' = ay + b$, $a \neq 0$.

A18 Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 3$.

D $y' = ay + f$ ou $y' - ay = f$ avec f fonction continue sur $\mathbb{R}$ est une **équation différentielle** à coefficients constants **avec second membre non constant** (lorsque f n'est pas une fonction constante).

F Soit a une constante réelle non nulle et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors la solution générale de $(E) : y' = ay + f$ est somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée $(E_0) : y' = ay$ et d'une solution particulière de (E) , ainsi :

solution générale de (E)	=	solution générale de l'homogène (E_0)	+	une solution particulière de (E)
---	---	--	---	---

A19 (preuve) Soit a une constante non nulle et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $(E) : y' = ay + f$ et $(E_0) : y' = ay$ l'équation homogène associée, y_0 est une solution particulière de (E) .

étape 1 Soit y une solution de (E) , montrer que $y - y_0$ est une solution de (E_0) .

étape 2 On suppose que $y - y_0$ est une solution de (E_0) , montrer que y est une solution de (E) .

étape 3 Conclure.

A20 On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y - 6x + 5$.

- vérifier que $y_0 : x \mapsto 3x - 1$ est une solution particulière de (E)
- déterminer la solution générale de (E)

1	RésolEquaDiff(y'=2y-6x+5)
☐	$\rightarrow y = c_1 e^{2x} + 3x - 1$

i Résoudre $y' = f$ revient à rechercher les primitives de f sur I .