

ACTIVITES 08. Logarithme népérien

D La fonction exponentielle :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in]0; +\infty[$$

admet une fonction réciproque appelée **logarithme népérien**, notée **ln** :

$$x \in]0; +\infty[\mapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$$

La fonction **ln** est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur son intervalle de définition $]0; +\infty[$.  **0 est rejeté**

F • $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0$, on a l'équivalence : $e^a = b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a = \ln(b)$

• $\ln(a)$ existe $\Leftrightarrow a > 0$, ainsi : $\ln(u(x))$ existe $\Leftrightarrow u(x) > 0$

A01 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f, g, h :

$$f(x) = \ln(-x + 5) \quad g(x) = \ln(x) - 3 \quad h(x) = (x - 4) \ln(-x + 1)$$

A02 Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g :

$$f(x) = \ln(-x + 5) - \ln(x + 4) \quad g(x) = (x^2 - 9) \ln(x^2 - 7x - 8)$$

F • $\forall x > 0, e^{\ln(x)} = x$ • $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$
• $\ln(1) = 0$ • $\ln(e) = 1$

A03 (preuve) Justifier les deux valeurs particulières $\ln(1)$ et $\ln(e)$.

$$\text{Simplifier : } A = e^{\ln(7)}, B = \ln(e^5), C = \ln(\sqrt{e}), D = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

M Résoudre une équation avec ln

- on détermine le **domaine d'existence** $\mathcal{D}$
- on se ramène à la **forme** $\ln(a) = \ln(b)$ puis on utilise l'équivalence : valables pour $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- parmi les nombres obtenus à la deuxième étape on ne garde que **ceux appartenant au domaine d'existence** $\mathcal{D}$

A04 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations et inéquations :

$$\begin{array}{llll} 1. e^x = -2 & 2. e^x = 3 & 3. 3e^{-x} - 2 = 5 & 4. e^{2x} > 6 \\ 5. e^{-x} + 1 > 4 & 6. e^{2x} - 5e^x = 6 & & \end{array}$$

A05 Résoudre dans $\mathbb{R}$: 1. $\ln(x) = -1$ 2. $\ln(2x - 7) = \ln(x^2 - 6x + 5)$

M Résoudre une inéquation avec ln

- on commence par déterminer le **domaine d'existence** $\mathcal{D}$
- on se ramène, si possible, à la forme $\ln(a) < \ln(b)$ ($\leq, >, \geq$) puis on utilise l'une des quatre équivalences valables pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\begin{array}{ll} \ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b & \ln(a) \leq \ln(b) \Leftrightarrow a \leq b \\ \ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b & \ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b \end{array}$$
- parmi les nombres obtenus à la deuxième étape, on ne garde que ceux appartenant au domaine d'existence $\mathcal{D}$

A07 Résoudre l'inéquation : $\ln(x + 1) \leq \ln(-x + 4)$.

M Tableau de signes de $E(x)$, $E(x)$ contenant un ln

- on détermine le **domaine d'existence** $\mathcal{D}$ de l'expression $E(x)$
- on cherche pour **quelles valeurs de x l'expression $E(x)$ est positive**
- on place le(s) signe(s) « + », puis dans les autres cases un signe « - »
 ne pas oublier de limiter ce tableau au domaine d'existence $\mathcal{D}$

A08 Dresser le tableau de signes de $E(x) = \ln(x + 1) - 2$.

F $\forall x > 0$ et $\forall y > 0$: $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.

A09 (preuve) Soient x et y deux réels strictement positifs.

En simplifiant de deux façons différentes $\ln(e^{\ln(x)+\ln(y)})$, retrouver la formule précédente.

A10 Soient x et y deux réels strictement positifs.

1. Démontrer que : $\ln(x^2) = 2 \ln(x)$, en déduire que : $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$.

2. Démontrer que : $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$, en déduire : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

3. Justifier à l'oral que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(x^n) = n \times \ln(x)$.

[F] ► Pour $x > 0, y > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \bullet \ln(x^2) &= 2 \ln(x) & \bullet \ln(x^n) &= n \ln(x) & \bullet \ln(\sqrt{x}) &= \frac{1}{2} \ln(x) \\ \bullet \ln\left(\frac{1}{y}\right) &= -\ln(y) & \bullet \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln(x) - \ln(y) \end{aligned}$$

A11 • exprimer en fonction de $\ln(2)$: $A = \ln(8)$ et $B = \ln(16e)$

• exprimer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(5)$: $C = \ln(10)$ et $D = \ln(500)$

• exprimer en fonction de $\ln(3)$ et $\ln(5)$: $E = \ln(15e^2)$ et $F = \ln\left(\frac{45}{e^4}\right)$

A12 Résoudre chacune des équations :

1. $\ln(x) = \ln(4) + 2\ln(3)$ 2. $\ln(x+2) + \ln(-x+1) = \ln(2)$

Formules de dérivation

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$, et on a :

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

On pourra retenir : ► $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Si u est dérivable sur un intervalle I et à valeur strictement positive sur I ,

alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$ autrement dit :

$$\forall x \in I, (\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

On pourra retenir : ► $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

A13 [preuve] Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = e^{\ln(x)}$.

En calculant de deux manières différentes $f'(x)$, retrouver que $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

A14 $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x \ln(x) - x$.

Calculer $f'(x)$, en déduire le tableau de variation de f (sans les limites).

A15 Soit f définie par $f(x) = \ln(-x+5)$. Déterminer $\mathcal{D}_f$, calculer $f'(x)$, en déduire le tableau de variation de f (sans les limites).

[P] La fonction $\ln : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0; +\infty[$.

A16 Démontrer la propriété précédente.

$$\text{[F]} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

A17 Déterminer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) + 2) \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \ln(x) - 3) \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - \ln(x))$$

[F] Croissances comparées

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

A18 On cherche à démontrer les deux formules précédentes.

1. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (on pourra poser $X = \ln(x)$).

2. En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$.

[F] Croissances comparées (admisses)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

A19 $\forall x > 0, f(x) = \ln(x) - 3x$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

A20C [d'après bac] On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{-x+1}\right)$$

et pour $x \neq 1$, on pose : $u(x) = \frac{x+3}{-x+1}$.

1. Étudier le signe de $u(x)$, en déduire l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Pour $x \in \mathcal{D}$ déterminer $u'(x)$, en déduire $f'(x)$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}$, en déduire les variations de f sur $\mathcal{D}$.

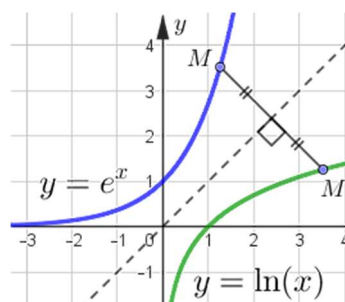
A21C [d'après bac] Soient f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \times \ln(x) \text{ et } g(x) = x - 1 + \ln(x)$$

1. Calculer $g'(x)$, en étudier le signe, en déduire les variations de g .
2. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.
3. Vérifier que, pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

En déduire le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}$ (sans les limites).

[P] Dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ et la courbe de la fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice du repère, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.



A20C On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{-x+1}\right)$$

$$x \neq 1, u(x) = \frac{x+3}{-x+1}$$

1. Étudier le signe de $u(x)$, en déduire l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f .

D'une part : $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

et d'autre part : $-x+1=0 \Leftrightarrow -x=-1 \Leftrightarrow x=1$

Règle : « $ax+b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$-x+1$	$+$	$+$	0	$-$
$u(x)$	$-$	0	$+$	$-$

On a : $f(x) = \ln(u(x))$, donc $f(x)$ existe lorsque $u(x) > 0$, la dernière ligne du tableau de signes montre que cela est réalisé lorsque $-3 < x < 1$, donc : $\mathcal{D} =]-3; 1[$.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

• $x \rightarrow (-3)^+$

On a : $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} (x+3) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} (-x+1) = 4$

donc par limite d'un quotient : $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x+3}{-x+1} = 0^+$.

On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \ln(u(x)) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty \text{ (cours)}$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = -\infty$.

• $x \rightarrow 1^-$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+3) = 4$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+1) = 0^+$

donc par limite d'un quotient : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{-x+1} = +\infty$.

On a donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(u(x)) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \text{ (cours)}$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

3. Pour $x \in \mathcal{D}$ déterminer $u'(x)$, en déduire $f'(x)$.

• Calcul de $u'(x)$

$$u(x) = \frac{x+3}{-x+1}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$u'(x) = \frac{1(-x+1) - (-1)(x+3)}{(-x+1)^2}$$

$$u'(x) = \frac{-x+1+x+3}{(-x+1)^2}$$

$$u'(x) = \frac{4}{(-x+1)^2}$$

• calcul de $f'(x)$

$$f(x) = \ln(u(x))$$

$$\text{Rappel : } (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4}{(-x+1)^2}}{\frac{x+3}{-x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(-x+1)^2} \times \frac{-x+1}{x+3}$$

$$\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \frac{4}{(-x+1)(x+3)}$$

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}$, en déduire les variations de f sur $\mathcal{D}$.

Sur $\mathcal{D} =]-3; 1[$, on a : $-x+1 > 0$ et $x+3 > 0$

donc $(-x+1)(x+3) > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : 4.

On en déduit que : $\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $] - 3 ; 1 [$.

A21C Soient f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \times \ln(x) \text{ et } g(x) = x-1 + \ln(x)$$

1. Calculer $g'(x)$, en étudier le signe, en déduire les variations de g .

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) = x-1 + \ln(x)$.

$$\text{Rappel : } (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{x}{x} + \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{x+1}{x}$$

Sur $]0; +\infty[$, $x > 0$ et $x+1 > 0$ donc $g'(x) > 0$.

On en déduit que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

$$g(1) = 1-1 + \ln(1) = 0 + 0 = 0$$

- g est strictement croissante sur $]0; 1[$, donc elle conserve strictement le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle : si $0 < x < 1$, alors $g(x) < g(1)$, or $g(1) = 0$, donc $g(x) < 0$
- g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$, donc elle conserve strictement le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle : si $1 < x$, alors $g(1) < g(x)$, or $g(1) = 0$, donc $0 < g(x)$

Conclusion :

$g(x)$ est strictement négatif sur $]0; 1[$ et est strictement positive sur $]1; +\infty[$

3. Vérifier que, pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

On a, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \times \ln(x)$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, (uv)' = u'v + v'u \text{ et } \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)' \times \ln(x) + (\ln(x))' \times \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1 \times x - 1(x-1)}{x^2} \times \ln(x) + \frac{1}{x} \times \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x-x+1}{x^2} \times \ln(x) + \frac{x-1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{x-1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-1 + \ln(x)}{x^2}$$

Or, $g(x) = x-1 + \ln(x)$ donc on a bien :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

En déduire les variations de f

$$f(1) = \frac{1-1}{1} \times \ln(1) = 0 \times 0 = 0$$

Tableau de variation de f

Un carré est toujours positif ou nul.

x	0	1	$+\infty$	
$g(x)$		−	0	+
x^2	0	+		+
$f'(x)$		−	0	+
Sens de variation de f			0	

