

ACTIVITES 07. Continuité

[D] Soit f une fonction de courbe représentative $\mathcal{C}_f$, $I \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $a \in I$ alors :

- f est **continue en a** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- lorsque f est définie à gauche et à droite de a , on a l'équivalence :
 f est **continu en a** $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- f est **discontinue en a** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} f$ n'est pas continue en a
- f est **continue sur I** $\Leftrightarrow f$ est continue en tout nombre de I

[i] dire que f est continue sur I revient à dire que l'on peut tracer « sans lever le crayon » la partie correspondante de la courbe de f

A01 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x < 2 \\ 3, & \text{si } x = 2 \\ x^2 - 3x + 5, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- Déterminer $f(2)$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$.
- La fonction f est-elle continue en 2 ? est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

[P] Soit f une fonction, I un intervalle tel que $I \subset \mathcal{D}_f$ et $a \in I$:

- si f est dérivable en a , alors f est continue en a (réciproque fausse)
- si f est **dérivable sur I** , alors f est **continue sur I** (réciproque fausse)
- toutes les fonctions de référence sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition
- la somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues sont continus sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition

A02 (preuve) Soit f définie et dérivable en a . Montrer qu'il existe une fonction ε définie au voisinage de 0 telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ et, pour tout h assez proche de zéro : $f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$.
En déduire que f est continue en a .

A03 On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Par lecture graphique et sans justification :

- f est-elle continue en 4 ?
- f est-elle dérivable en 4 ?

A04 f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

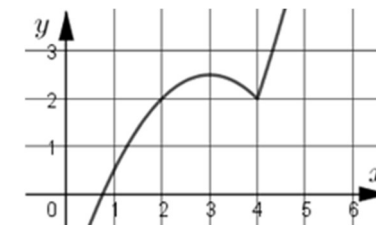
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ -x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- préciser $f(2)$, déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x)$ et déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$
- f est-elle continue en 2 ?

A05 Soit f définie par :

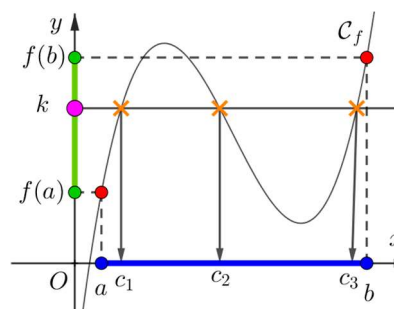
$$f(x) = \begin{cases} -x + 6 & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ e^{x-1} + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- préciser $f(1)$, déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$ et déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$
- f est-elle continue en 1 ? est-elle continue sur $\mathbb{R}$?



Théorème des valeurs intermédiaires

► Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et k un réel compris, au sens large, entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.



Pour la fonction f représentée ci-contre, l'équation $f(x) = k$ admet exactement trois solutions dans $[a; b]$, notées c_1 , c_2 et c_3 .

Généralisation du théorème des valeurs intermédiaires à $]a ; b]$...

Soit f une fonction continue sur $]a ; b]$ admettant une limite à droite en a et k un réel compris au sens large entre $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $]a ; b]$

[i] D'autres généralisations existent pour $[a ; b[$, $]a ; b[$, $] - \infty ; b]$ etc.

[i] Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'existence.

► Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$ et k un réel compris au sens large entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ **admet une unique** solution dans $[a ; b]$.

[i] le corollaire se généralise aux intervalles $[a ; b[$, $]a ; b[$, $] - \infty ; b]$ etc.

A06 Pour tout réel x , on pose : $f(x) = e^x - 2$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
2. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 0,001.

[P] Soit (u_n) une suite qui converge vers ℓ et f une fonction **continue en ℓ** , alors la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

[P] Théorème du point fixe

Soit I un intervalle, f une fonction continue sur I telle que : $f(I) \subset I$, (u_n) une suite telle que $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, si la suite (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors : $\ell = f(\ell)$.

[i] Pour montrer que $\ell \in I$ sans en connaître la valeur, on utilise souvent un encadrement de ce nombre.

A07 exercice type

On considère la suite définie par $u_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 0,25u_n + 30$, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0,25x + 30$.

1. Démontrer que : $f([8 ; 40]) \subset [8 ; 40]$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 40$.
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Déterminer la limite ℓ de (u_n) .