

ACTIVITES 06. Dérivation et convexité

[D] Soient I et J deux intervalles, u et v deux fonctions telles que : u est définie sur I et $u(I) \subset J$, v est définie sur J , alors $v \circ u$ est la fonction définie sur I par : $\forall x \in I, (v \circ u)(x) = v(u(x))$.

[i] ⚡ attention, souvent $v \circ u \neq u \circ v$

A01 u et v sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^2$ et $v(x) = 2x^2 + x + 1$.
Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
 $(v \circ u)(x) = 2x^4 + x^2 + 1$ et $(u \circ v)(x) = 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$.

[F] Soient I et J deux intervalles, u une fonction dérivable sur I telle que $u(I) \subset J$, v une fonction dérivable sur J , alors $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u' : \forall x \in I, (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$.

On pourra retenir : $\blacktriangleright (v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$

[P] Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction f définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a, pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

On pourra retenir : $\blacktriangleright (e^u)' = u' \times e^u$

A02 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-3x+7}$ et $g(x) = e^{x^2+x+1}$. Déterminer $f'(x)$, $g'(x)$.

[F] Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , à valeurs positives ou nulles et f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$.

Alors, sur tout intervalle où $u(x) > 0$, la fonction f est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

$$\blacktriangleright (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u > 0 \text{ sur l'intervalle considéré})$$

A03 Déterminer $f'(x)$ pour f définie sur $\mathbb{R}$:

$$1. f(x) = \sqrt{x^2 + 51} \quad 2. f(x) = \sqrt{e^x + 1}$$

A04 $f(x) = \sqrt{-x + 3}$, déterminer sur quel intervalle f est définie, sur quel intervalle f est dérivable, puis déterminer $f'(x)$.

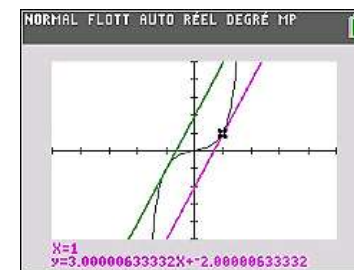
[P] Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I , n un entier naturel non nul, on pose, pour tout $x \in I : f(x) = (u(x))^n$. Alors la fonction f est dérivable sur I et on a : $\forall x \in I, f'(x) = n \times u'(x) \times (u(x))^{n-1}$.

On retiendra que : $\blacktriangleright (u^n)' = nu'u^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$

A05 Déterminer $f'(x)$ pour f définie sur $\mathbb{R}$:

$$1. f(x) = (x^2 + 7)^5 \quad 2. f(x) = (1 - x)^3 \quad 3. h(x) = (1 - e^x)^2$$

A06 On visualise sur l'écran de la calculatrice la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2-1}$ ainsi que les tangentes d et Δ aux points d'abscisses respectives -1 et 1 . Les tangentes d et Δ semblent être parallèles, démontrer que cela est effectivement le cas.



A07 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xe^{-x+3} + 2$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

- Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter en terme d'asymptote verticale ou horizontale lorsque cela est possible.
- Calculer $f'(x)$, en étudiant le signe, dresser le tableau de variation de f .

[F] Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , alors $f : x \mapsto \cos(u(x))$ et $g : x \mapsto \sin(u(x))$ sont dérivable sur I et, pour tout $x \in I$:
 $f'(x) = -u'(x) \times \sin(u(x))$ et $g'(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$.

$$\blacktriangleright (\cos u)' = -u' \times \sin u \quad \blacktriangleright (\sin u)' = u' \times \cos u.$$

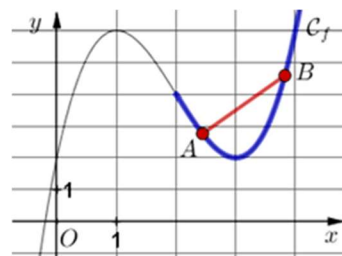
A08 Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(5x + 4)$ et $g(x) = \cos(-2x + 1)$.
Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$.

[D] quelques définitions

Soit f une fonction et I un intervalle tel que $I \subset \mathcal{D}_f$.

- f est **convexe sur I**

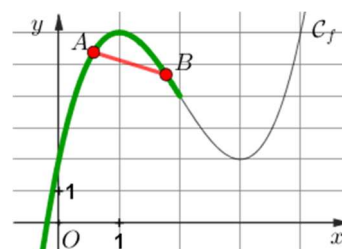
déf
 $\Leftrightarrow \forall a, b \in I$, la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$ comprise entre $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ est située **en-dessous** du segment $[AB]$.



f est **convexe** sur $[2; +\infty[$

- f est **concave sur I**

déf
 $\Leftrightarrow \forall a, b \in I$, la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$ comprise entre $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ est située **au-dessus** du segment $[AB]$.



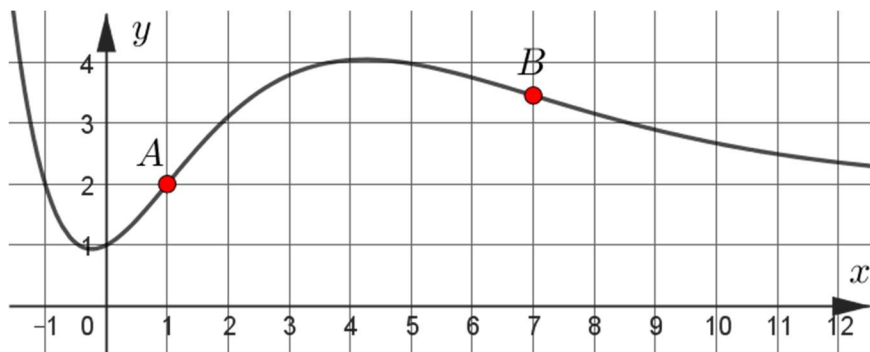
f est **concave** sur $] -\infty; 2]$

[P] f est convexe sur $I \Leftrightarrow (-f)$ est concave sur I

A09 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne ci-dessous la courbe représentative.

On précise que f change de convexité aux points A et B , dont les abscisses sont des entiers.

Etudier la convexité de f .



[D] On munit le plan d'un repère orthogonal.

- une courbe est convexe (resp. concave) sur un intervalle $\stackrel{\text{d\'ef}}{\Leftrightarrow}$ elle est la représentation graphique d'une fonction convexe (resp. concave) sur cet intervalle
- si f est dérivable sur un intervalle I et f' est dérivable sur I , alors on dit que f est **deux fois dérivable** sur I , on appelle alors **dérivée seconde** de f sur I la fonction notée f'' qui est dérivée de f' : $f'' = (f')'$

[P] Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

- f est **convexe** sur I
- $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessus de ses tangentes** (en se limitant à l'intervalle I)
- f' est **croissante** sur I
- f'' est **positive ou nulle** sur I , c'est-à-dire : $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$

[i] Il existe des formulations équivalentes pour f concave sur I ...

► f est convexe sur $I \Leftrightarrow f''$ est positive ou nulle sur I

A10 Preuve partielle de la propriété précédente

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I telle que $f'' \geq 0$ sur I , $a \in I$ et T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

Une équation de T_a s'écrit donc : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Pour tout $x \in I$, on pose : $h(x) = f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$.

1. Justifier que : $\forall x \in I, h'(x) = f'(x) - f'(a)$.
2. Justifier que h' est croissante sur I .
3. Calculer $h'(a)$, en déduire le signe de $h'(x)$ sur I puis le minimum absolu de h sur I .
4. Calculer $h(a) = 0$, en déduire que : $\forall x \in I, h(x) \geq 0$, et interpréter pour la position relative de $\mathcal{C}_f$ et T_a sur I .

A11 Étudier la convexité de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 2$$

A12 Étudier la convexité de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x+1}$.

A13 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[0; 10]$, on donne le tableau de variation de la **dérivée** f' de f :

x	0	4	10
$f'(x)$	7	↘ 3	↗ 5

À l'aide du tableau de variations de f' , étudier la convexité de f sur $[0; 10]$.

A14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + x^2 - 3$.

1. Étudier la convexité de f .
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle, en déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} + x^2 - 3 \geq -x - 2$.

A15 Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.

[D] Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $A \in \mathcal{C}_f$:

A est un **point d'inflexion de la courbe** $\mathcal{C}_f \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \mathcal{C}_f$ « traverse » sa tangente en A .

[P] Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $A \in \mathcal{C}_f$, alors on a les équivalences :

► A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f \Leftrightarrow f$ **change de convexité** en x_A
 $\Leftrightarrow f''$ **s'annule et change de signe** en x_A

[i] Si $f''(a) = 0$, cela **ne suffit pas** pour que $A(a; f(a))$ soit un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$: il faut que f'' **change de signe** en a .

A16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

- Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

- Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$

[P] Inégalités de convexité

- si f est convexe sur un intervalle I , alors pour tous nombres a et b de I :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

- si f est concave sur un intervalle I , alors pour tous nombres a et b de I :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

A17 On souhaite démontrer les deux inégalités précédentes

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , a et b deux nombres appartenant à I , A et B les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives a et b .

1. Préciser les coordonnées de A et celles de B , en déduire celles du milieu I de $[AB]$.
2. On note K le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse égale à celle du I : $x_K = x_I$.

- a. On suppose que f est convexe sur I .
Comparer y_I et y_K , en déduire que :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

- b. On suppose que f est concave sur I .
Comparer y_I et y_K , en déduire que :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

3. Application

Écrire l'inégalité de convexité :

- pour la fonction carré $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$
- pour la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$