

ACTIVITES 04. Dénombrement

[D] quelques définitions

- un **ensemble** est un «tas» d'objets appelés **éléments** dans lequel l'**ordre n'a pas d'importance**, par exemple : $\{1; 3; 4\} = \{3; 1; 4\}$
- un **ensemble est fini** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ il contient un **nombre fini d'éléments**
- le **cardinal** d'un ensemble **fini** E est le nombre d'éléments de cet ensemble, il se note : **Card**(E), plus rarement $|E|$
- l'**ensemble vide** noté $\emptyset$ est l'ensemble ayant zéro élément $\text{Card}(\emptyset) = 0$, ne pas confondre $\{\emptyset\}$ (qui contient un élément, $\emptyset$) avec $\emptyset$
- $x \in E$ indique que x est un élément de l'ensemble E
- E et F étant deux ensembles, on écrit $E \subset F$ pour indiquer que tous les éléments de E sont aussi des éléments de F , on dit alors que E **est une partie de** (ou est un **sous-ensemble de**) F
- pour tout ensemble E : $\emptyset$ et E sont des parties de E
- l'ensemble de toutes les parties de E se note $\mathcal{P}(E)$

A01 $E = \{a; b\}$, écrire les parties de E , en déduire $\text{Card}(\mathcal{P}(E))$.

A02 $E = \{a; b; c\}$, écrire les parties de E , en déduire $\text{Card}(\mathcal{P}(E))$.

[F] ► si $\text{Card}(E) = n$, alors $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$

A03 Démontrer par récurrence sur n la formule précédente.

- intersection** de deux ensembles : $x \in E \cap F \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} x \in E \text{ et } x \in F$
- réunion** de deux ensembles : $x \in E \cup F \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} x \in E \text{ ou } x \in F$
(il s'agit du « ou » inclusif ; $x \in E$ ou $x \in F$ signifie « soit $x \in E$ et $x \notin F$, soit $x \notin E$ et $x \in F$, soit $x \in E$ et $x \in F$ »)
- E et F sont **disjoints** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} E \cap F = \emptyset$

- un **couple** (x, y) avec $x \in E$, $y \in F$ est la donnée d'un élément x de E et d'un élément y de F dans cet ordre
- un **triplet** (x, y, z) avec $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$ est la donnée d'un élément x de E , d'un élément y de F et d'un élément z de G dans cet ordre
- $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$
- $(x, y, z) = (x', y', z') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y' \text{ et } z = z'$
- le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble de tous les **couples** (x, y) avec $x \in E$, $y \in F$
- le **produit cartésien** $E \times F \times G$ est l'ensemble de tous les triplets (x, y, z) avec $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$
- $E \times E$ se note aussi E^2 , $E \times E \times E$ se note aussi E^3
- (x, y) avec x, y appartenant à E est un **couple de** E
- (x, y, z) avec x, y, z appartenant à E est un **triplet de** E
- le **produit cartésien de p ensembles** $E_1, \dots, E_p$, noté $E_1 \times \dots \times E_p$, est l'ensemble des **p -uplets** $(x_1, \dots, x_p)$ avec $x_1 \in E_1, \dots, x_p \in E_p$; un couple est un 2-uplet, un triplet est un 3-uplet
- $\underbrace{E \times \dots \times E}_{p \text{ facteurs } E}$ se note E^p , $(x_1, \dots, x_p)$ avec $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$ est un **p -uplet de** E
- un couple, un triplet, un p -uplet s'écrivent avec des parenthèses, non des accolades : ainsi, $(\pi, \sqrt{5})$ est un couple mais $\{\pi, \sqrt{5}\}$ n'est pas un couple, c'est une partie de $\mathbb{R}$ ayant deux éléments.

[F] Soient E et F deux ensembles finis, on a :

► pour tous ensembles E et F :

$$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$$

► cardinal de la réunion de deux ensembles disjoints :

$$\text{si } E \cap F = \emptyset, \text{ alors } \text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$$

► **principe multiplicatif** : $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$

► le nombre de **p -uplets** d'un ensemble à n éléments est n^p

A04 Le code d'un cadenas est constitué de trois chiffres, chacun pouvant être choisi parmi les dix chiffres de 0 à 9, les répétitions étant autorisées. Combien existe-t-il de codes possibles ?

[D] factorielle

$$0! = 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n!$ est le produit des entiers consécutifs de n à 1 :

$$n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 1$$

[F] $\forall n \in \mathbb{N}, (n + 1)! = (n + 1) \times n!$

exemple $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

A05 Écrire en Python une fonction qui pour $n \in \mathbb{N}$ retourne $n!$

[D] $n \in \mathbb{N}^*, \text{Card}(E) = n, p$ est un entier tel que $1 \leq p \leq n$, alors :

- un **arrangement à p éléments** de E , ou **p -arrangement** de E , est un p -uplet d'éléments de E tous distincts
 ► un arrangement correspond à un tirage avec ordre et sans répétition
- une **permutation de E** , est un n -arrangement des éléments de E , c'est un **n -uplet d'éléments tous distincts de E**
 ► une permutation de E correspond à un tirage avec ordre et sans répétition de TOUS les éléments de E

A06 Écrire toutes les permutations et tous les arrangements à 2 éléments de $E = \{a; b; c\}$.

[P] principe multiplicatif

- Si, pour un p -uplet :
 – il y a n_1 choix pour le premier la première coordonnée d'un p -uplet,
 – cela étant fait il y a n_2 choix pour la deuxième coordonnée,
 – ...
 – cela étant fait il y a n_p choix pour la p -ième coordonnée,
 alors il y a **$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$ choix** pour le p -uplet.

A07 Les questions suivantes sont indépendantes :

Q1 : combien l'ensemble $E = \{a; b; c; d; e\}$ admet-il de permutations ?

Q2 : Sophie possède sept bonbons tous différents, de combien de façons peut-elle les aligner devant elle ?

Q3 : Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ANANAS ?

Q4 : Combien y a-t-il d'anagrammes du mot EXAGERER ?

rép. : 120, 5 040, 60, 3 360

[P] On note n la longueur d'un mot dont certaines lettres se répètent, $n_1, n_2, \dots, n_k$ le nombre d'occurrences des lettres qui se répètent, alors le **nombre d'anagrammes** de ce mot est :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

A08 Effectuer sans calculatrice :

$$A = \frac{31!}{30!} \quad B = \frac{11! - 10!}{10!} \quad C = \frac{7 \times 5!}{6!} \quad D = \frac{(n + 3)!}{(n + 1)!}$$

[F] Le **nombre de p -arrangements** d'un ensemble à n éléments est :

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!}$$

A09 Montrer qu'avec 20 partants il y a 6 840 tiercés dans l'ordre.

[D] E est un ensemble de n éléments et $p \leq n$: une **combinaison** de p éléments de E est une partie à p éléments de E .

On note $\binom{n}{p}$, qui se dit « p parmi n », le **nombre de combinaisons** de p éléments d'un ensemble à n éléments, $n \in \mathbb{N}$.

[F] Pour $0 \leq p \leq n$ on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n - p)!}$$

A10 On souhaite démontrer la formule précédente.

1^{er} cas : $n \geq 1$

Soit p un entier naturel tel que : $1 \leq p \leq n$.

1. Combien y a-t-il d'arrangements à p éléments de E ?
2. Combien d'arrangements à p éléments de E peut-on former à partir d'une partie à p éléments de E ?
3. En déduire que le nombre de parties à p éléments de E est :

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

2^e cas : $n = 0$

On a alors : $0 \leq p \leq 0$ donc $p = 0$.

Vérifier que le nombre de parties à 0 élément d'un ensemble à 0 éléments est égal à :

$$\frac{0!}{0!(0-0)!}$$

[M] Une **combinaison** de p éléments parmi n peut être associée, au choix :

- à un tirage **simultané** de p objets dans une urne qui en contient n
- à un tirage successif, sans répétition, dans lequel l'ordre d'apparition des objets n'est pas pris en compte, de p objets dans une urne qui en contient initialement n

A11 Montrer qu'il y a 6 combinaisons de 2 éléments de $E = \{a, b, c, d\}$.

[F] Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\bullet \binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{1 \times 2 \times \dots \times k}$$

$$\bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \bullet \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad (n \geq 1)$$

$$\bullet \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\text{Relation de Pascal : } \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

A12 Démontrer la relation de Pascal.

A13 Construire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 4$.

[F] Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

A14 On souhaite démontrer la formule précédente.

1. On suppose $n \geq 1$ et on considère $E = \{e_1; \dots; e_n\}$ ayant n éléments.

Rappel : le nombre de parties d'un ensemble ayant n éléments est 2^n .

- a. Quel est le nombre de parties de E ayant p éléments, $0 \leq p \leq n$?
En déduire que le nombre total de parties de E est $\binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n}$.
- b. Conclure.

2. Etudier directement le cas $n = 0$.

A15C Lors d'une réunion, chaque paire de participants se serre la main une seule fois : on dénombre 120 poignées de main.
Combien y a-t-il de participants ?

A16C Marie possède 5 jeans et 7 T-shirts.

Elle part en vacances et décide d'emporter dans sa valise 2 jeans et 3 T-shirts. De combien de façons peut-elle faire sa valise ?

A17C Une classe de terminale compte 14 filles et 16 garçons.

Trois élèves doivent être désignés pour présenter la terminale aux élèves de Première, cette délégation devra comporter au moins une fille.
De combien de façons peut-on choisir ces trois élèves ?

A18C On tire cinq cartes d'un jeu de 32 cartes : on obtient alors une main de 5 cartes. Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes contenant :

1. Le valet de trèfle ?
2. Exactement deux cœurs ?
3. Un roi, une dame, deux valets et une carte différente d'un roi, d'une dame et d'un valet ?
4. Au moins un roi ?

A15C 120 poignées de main échangées. Combien de participants ?

Notons $n \in \mathbb{N}$ le nombre de participants.

Une poignée de main est définie par une partie à 2 éléments de l'ensemble des participants, il y en a $\binom{n}{2}$. Or, il y a 120 poignées de main échangées, donc il s'agit de résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation $\binom{n}{2} = 120$:

$$\binom{n}{2} = 120 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 120 \Leftrightarrow \frac{n^2 - n}{2} = 120 \Leftrightarrow n^2 - n = 240 \\ \Leftrightarrow n^2 - n - 240 = 0$$

Cette équation est de la forme $an^2 + bn + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -240$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-240) = 961$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1 - \sqrt{961}}{2} = \frac{1 - 31}{2} = \frac{-30}{2} = -15 \notin \mathbb{N}$$

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1 + \sqrt{961}}{2} = \frac{1 + 31}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

La seule de ces racines appartenant à $\mathbb{N}$ est 16, donc $n = 16$.

Conclusion : **il y avait 16 participants.**

A16C Marie possède 5 jeans et 7 T-shirts, valise : 2 jeans et 3 T-shirts.

De combien de façons peut-elle faire sa valise ?

Il y a $\binom{5}{2}$ façons de choisir 2 jeans parmi les 5, ceci étant fait il y a $\binom{7}{3}$ façons de choisir 3 T-shirts parmi les 7.

Les choix se multiplient donc il y a : $\binom{5}{2} \times \binom{7}{3}$ façons de faire la valise.

Or :

$$\binom{5}{2} \times \binom{7}{3} = \frac{5!}{2!3!} \times \frac{7!}{3!4!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 10 \times 35 = 350$$

Donc Marie a **350 façons de faire sa valise.**

A17C Une classe de Terminale compte 14 filles et 16 garçons.

Délégation de trois élèves doit comporter au moins une fille.

De combien de façons peut-on choisir ces trois élèves ?

Méthode 1

Remarquons que « au moins une fille » est le contraire de « aucune fille »

c'est-à-dire de « que des garçons ».

$14 + 16 = 30$ donc il y a 30 élèves dans cette classe

Il y a $\binom{30}{3}$ choix possibles, $\binom{16}{3}$ choix ne contenant que des garçons donc :
 $\binom{30}{3} - \binom{16}{3}$ choix avec au moins une fille.

$$\text{Or, } \binom{30}{3} - \binom{16}{3} = 4060 - 560 = 3500,$$

donc : il y a **3 500 façons de choisir ces trois élèves.**

Méthode 2

Obtenir au moins une fille est la réunion disjointe de « obtenir 1 fille et 2 garçons », « obtenir 2 filles et 1 garçon » et « obtenir trois filles ».

1 fille parmi 14 et 2 garçons parmi 16 :

$$\binom{14}{1} \times \binom{16}{2} = 14 \times \frac{16 \times 15}{1 \times 2} = 1680$$

2 filles parmi 14 et 1 garçon parmi 16 :

$$\binom{14}{2} \times \binom{16}{1} = \frac{14 \times 13}{1 \times 2} \times 16 = 1456$$

3 filles parmi 14 :

$$\binom{14}{3} = \frac{14 \times 13 \times 12}{1 \times 2 \times 3} = 364$$

$$1680 + 1456 + 364 = 3500$$

Il y a **3 500 façons de choisir ces trois élèves.**

A18C On tire cinq cartes d'un jeu de 32 cartes : on obtient alors une main de 5 cartes. Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes contenant :

1. Le valet de trèfle ?

Le valet de trèfle et 4 cartes différentes du valet de trèfle :

$$\binom{1}{1} \times \binom{31}{4} = 1 \times 31465 = 31465$$

Il y a **31 465** mains de ce type.

2. Exactement deux cœurs ?

Deux cœurs et trois cartes qui ne sont pas des cœurs :

$$\binom{8}{2} \times \binom{24}{3} = 28 \times 2024 = 56672$$

Il y a **56 672** mains de ce type.

3. Un roi, une dame, deux valets et une carte différente de roi, dame et valet.

un roi, une dame, deux valets et une autre carte :

$$\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{20}{1} = 4 \times 4 \times \frac{4 \times 3}{2} \times 20 = 1\,920$$

Il y a **1 920** mains de ce type.

4. Au moins un roi ?

Méthode n°1

Nombre total de mains : $\binom{32}{5}$

Nombre de mains n'ayant aucun roi : $\binom{28}{5}$

Nombre de mains ayant au moins un roi :

$$\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 201376 - 98280 = 103\,096$$

Il y a **103 096** mains de ce type.

Méthode n°2

un roi et quatre cartes $\neq$ roi : $\binom{4}{1} \times \binom{28}{4} = 81\,900$

deux rois et trois cartes $\neq$ roi : $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19\,656$

trois rois et deux cartes $\neq$ roi : $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2} = 1\,512$

quatre rois et une carte $\neq$ roi : $\binom{4}{4} \times \binom{28}{1} = 28$

$$81\,900 + 19\,656 + 1\,512 + 28 = 103\,096$$

Il y a **103 096** mains de ce type.

M quelques pistes pour dénombrer

On extrait p objets d'un ensemble contenant n objets :

- simultanément
ou successivement, sans répétition et sans tenir compte de l'ordre
alors on a affaire à des **combinaisons**, il y en a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}$$

- l'ordre est important et les répétitions sont autorisées
alors un résultat est un **p-uplet avec répétition autorisée**, il y en a :

$$n^p = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{p \text{ facteurs } n}$$

- l'ordre est important et il n'y a pas de répétition
alors un résultat est un **p-uplet sans répétition**, c'est-à-dire un **arrangement à p éléments**, il y en a :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$$

- l'ordre est important et il n'y a pas de répétition et TOUS les objets sont extraits ($p = n$)
 $\Rightarrow$ un résultat est une **permutation** de l'ensemble de départ, il y en a :

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$$