

ACTIVITES 03. Limites de fonctions

D limite d'une fonction

- f est **définie au voisinage de $+\infty$** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \mathcal{D}_f$ contient un intervalle de la forme $]c; +\infty[$

- soit f définie au voisinage de $+\infty$, alors :

f a **pour limite $+\infty$ en $+\infty$**

$\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ pour tout réel A , les nombres $f(x)$ sont supérieurs à A pour tout x suffisamment grand, on écrit alors : **$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$**

► $\forall A \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathcal{D}_f$, si $x > m$ alors $f(x) > A$

(le nombre m dépend de A ; on définit de manière analogue : « f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ », « f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ » et « f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ »)

- soit f définie au voisinage de $+\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$, alors :

f a **pour limite ℓ en $+\infty$**

$\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout x suffisamment grand, on écrit alors : **$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$**

► $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathcal{D}_f$, si $x > m$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

(m dépend de ε ; on définit de manière analogue : **$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$**)

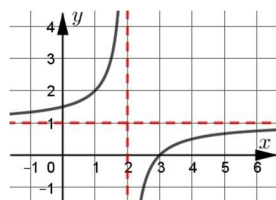
- la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$**

$$\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

(on définit de même **asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$**).

A01 On donne la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Par lecture graphique déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis interpréter pour $\mathcal{C}_f$.



A02 La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ? Si oui, préciser.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
Sens de variation de f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

A03 Interpréter en terme d'asymptote les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

A04 $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 2$ pour asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$. En déduire les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

A05 Rappel : « f admet pour limite ℓ en $+\infty$

$\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathcal{D}_f$, si $x > m$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ »

$\forall x \neq 1, f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

- Pour $\varepsilon = 0,5$ donner une valeur possible de m .
- Pour $\varepsilon = 0,1$ donner une valeur possible de m .
- Traiter le cas général $\varepsilon > 0$.

D Soit a un réel appartenant à $\mathcal{D}_f$ ou borne finie de $\mathcal{D}_f$ et $\ell \in \mathbb{R}$:

- f a **pour limite ℓ en a** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout x assez proche de a , on écrit alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell :$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que : $\forall x \in \mathcal{D}_f$, si $|x - a| < \delta$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

(le nombre δ dépend de ε ; on définit de manière analogue la limite à gauche (à droite) en a en se limitant aux valeurs de x situées à gauche (à droite) de a et on écrit alors : **$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ ($\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$)**)

P ► si f est **définie en a** et **admet une limite en a** , alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$: **$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$** .

[D] Soit $a \in \mathbb{R}$ une borne de $\mathcal{D}_f$ avec $a \notin \mathcal{D}_f$, alors :
la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$

$$\stackrel{\text{d\'ef}}{\Leftrightarrow} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$$

[P] Limite de fonctions de référence en a

Si f est une fonction de référence et $a \in \mathcal{D}_f$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, donc :

- P est un polynôme, alors : $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$
- P et Q sont des polynômes avec $Q(a) \neq 0$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

- $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$
- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad (a \geq 0)$
- $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$
- $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$

[F] Limites de fonctions de référence en $-\infty$ et en $+\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \pm\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
- ($n \in \mathbb{N}^*$)

(on les retrouve facilement en visualisant les courbes représentatives)

A06 Donner sans justification, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^6 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6.$$

[P] Les règles de calcul de la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient sont les mêmes que celles des suites numériques.

[i] Lorsqu'un dénominateur tend vers 0, il est indispensable de savoir s'il tend vers 0^+ ou bien vers 0^- : faire le **tableau de signe du dénominateur** est souvent très utile.

A07 Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 7^-$ puis lorsque $x \rightarrow 7^+$ pour f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{7\}$ par :

$$f(x) = \frac{x-10}{x-7}$$

A08 Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$:

1. $f(x) = e^{-2x+5}$
2. $f(x) = e^{-x^2}$.

[M] Si f est une fonction polynôme, on peut « mettre de force » en facteur la plus grande puissance de x dans $f(x)$ cela évite les F.I. lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

A09 Pour tout réel x , on pose : $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$.

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

[M] Le **théorème de comparaison** et celui **des gendarmes** sur les suites se généralisent aux limites de fonctions en $-\infty$, en $a \in \mathbb{R}$ et en $+\infty$.

[M] Lorsqu'une expression comporte un cosinus ou un sinus, il est souvent commode de commencer à écrire les encadrements :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

[D] Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$, alors :

- la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

(on définit de même une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$)

A10 Pour tout réel x , $f(x) = x^2 + 3\sin(x)$: déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

A11 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x+1} + 5\sin(x)$, déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

A12 $\Delta : y = 2x + 2$ et $d : y = 2x + 1$, montrer que d est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$, et Δ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x + \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$$

A13 On va démontrer les résultats suivants :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty (*) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 (**)$$

Pour tout réel x , on pose : $f(x) = e^x - x - 1$.

1. Calculer $f'(x)$, résoudre $f'(x) \geq 0$, en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ puis que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.
2. Démontrer (*), en déduire (**).

Formules de croissances comparées

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

A14 On va démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

Pour tout $x \geq 0$, on pose : $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$ et on se donne $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $g''(x)$, en étudier le signe sur $[0; +\infty[$, en déduire le sens de variation de g' sur $[0; +\infty[$ puis le signe de $g'(x)$ sur $[0; +\infty[$, en déduire que g est croissante sur $[0; +\infty[$, puis déterminer le signe de $g(x)$ sur cet intervalle, en déduire que : $\forall x > 0, \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.
2. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
3. a. Justifier que :

$$\forall x > 0, \text{ on a : } \frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)^n$$

b. En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

A15 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 5} - x$; déterminer la limite de f en $+\infty$.

M Lorsqu'une forme indéterminée se présente et que $f(x)$ contient un radical $\sqrt{\dots}$, il est souvent utile d'utiliser l'expression conjuguée. L'expression conjuguée de $A + B$ est $A - B$, celle de $A - B$ est $A + B$.

A16 Déterminer la limite lorsque $x \rightarrow 0^+$ de $f(x)$ où, pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{(x^{10} + 10)^2 - 100}{x^{10}}$$

A17 Calculer chacune des limites :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1)e^x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1)e^x$

A18 Calculer :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x})$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^{0,1x})$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5x e^{\frac{1}{2}x} \right)$

A19 Pour tout $x \neq 0$ on pose :

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, interpréter pour $\mathcal{C}_f$.
2. Déterminer les limites de f aux bornes finies de $\mathcal{D}_f$, interpréter pour $\mathcal{C}_f$.
3. Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, dresser le tableau de variation de f en y plaçant les limites.