

ACTIVITES 02. Géométrie vectorielle de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur de la géométrie plane.

[D] colinéarité

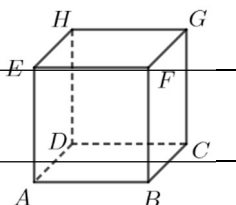
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

[P] quelques propriétés

- $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur de l'espace
- $\blacktriangleright$ Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors on a l'équivalence :
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$
- des points sont **alignés** s'il existe une droite les contenant tous
- deux points sont toujours alignés mais trois points peuvent ne pas l'être
- $\blacktriangleright$ A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

A01 Soit $ABCDEFGH$ un cube, compléter :

1. $\overrightarrow{B...} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BG}$	2. $\overrightarrow{B...} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GD}$
3. $\overrightarrow{C...} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DG}$	4. $\overrightarrow{A...} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD}$



A02 Dans un tétraèdre $ABCD$, on note E le milieu de $[AB]$ et F est le milieu de $[CD]$, montrer que : $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

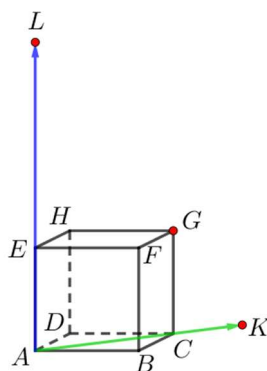
A03 $ABCDEFGH$ est un cube, K et L vérifient :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AL} = 3\overrightarrow{AE}$$

1. Exprimer $\overrightarrow{GK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{GL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. Les points K, G et L sont-ils alignés ?

rép :

$$\overrightarrow{GK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}, \quad \overrightarrow{GL} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}$$

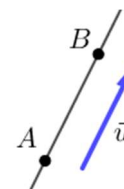


A04 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs, et A, B, C et D quatre points vérifiant $\overrightarrow{AB} = 3\vec{u} + 3\vec{v} + 2\vec{w}$, $\overrightarrow{AC} = 5\vec{u} + 4\vec{v} + \vec{w}$, et $\overrightarrow{AD} = 9\vec{u} + 6\vec{v} - \vec{w}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{BC} = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ et $\overrightarrow{BD} = 6\vec{u} + 3\vec{v} - 3\vec{w}$
2. En déduire que les points B, C et D sont alignés.

[D] vecteur directeur d'une droite

- un vecteur non nul $\vec{u}$ est un **vecteur directeur** d'une droite $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ il existe deux points distincts A et B de cette droite tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$



[P] quelques propriétés

- si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite, alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de cette droite
- si $A \neq B$, alors : $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB)
- $\blacktriangleright M \in (AB) \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

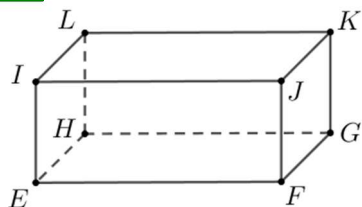
[D] quelques définitions

- des points sont **coplanaires** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ il existe un plan les contenant tous
- deux points sont nécessairement coplanaires
- trois points sont nécessairement coplanaires mais quatre points peuvent ne pas l'être
- $ABCD$ est un **tétraèdre** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} A, B, C, D$ ne sont pas coplanaires

[P] quelques propriétés

- si trois points A, B, C ne sont pas alignés alors il existe un et seul plan les contenant tous, noté (ABC) , et on dit qu'ils **définissent** ce plan
- $\blacktriangleright$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, alors les points A, B, C définissent un plan noté (ABC)

A05 Soit $EFGHIJKL$ un pavé droit.

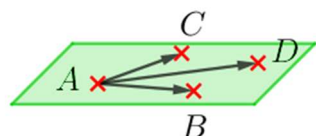


Répondre sans justification :

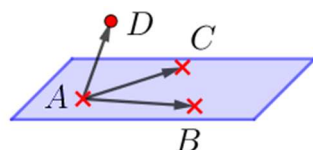
- E, G, L, J sont-ils coplanaires ?
- E, J, K, H sont-ils coplanaires ?

[D] combinaison linéaire, vecteurs coplanaires

- $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v} \iff$ il existe des réels α et β tels que : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
- soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs et A, B, C, D quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$, on a l'équivalence : les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **coplanaires** $\iff$ les quatre points A, B, C, D sont **coplanaires**



$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires

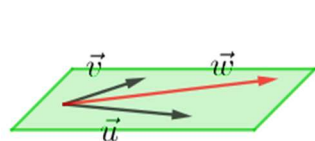


$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ non coplanaires

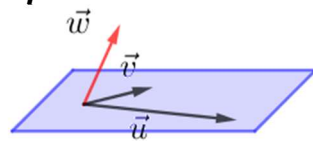
[P] propriété

- $\blacktriangleright$ soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires, on a l'équivalence : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **coplanaires** $\iff$ il existe des réels α et β tels que

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$



$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires
il existe $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$
 $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$



$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ non coplanaires
impossible d'écrire
« $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ »

A06 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant non colinéaires, on pose $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$: les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

A07 $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires, on pose $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$: $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

rép : $\vec{w}$ peut-il s'écrire $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$? $\alpha = 2, \beta = -1$.

[D] position relative de deux plans

Deux **plans** sont **parallèles** lorsque :

- soit ils n'ont **aucun** point en commun (ils sont **strictement parallèles**)
- soit ils ont **tous** leurs points en commun (ils sont **confondus**)

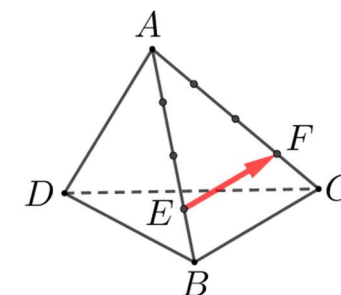
[P] Deux plans qui ne sont pas parallèles sont **sécants** suivant une droite.

Plans parallèles		Plans sécants
strictement parallèles	confondus	
aucun point en commun	l'ensemble des points en commun est un plan	l'ensemble des points en commun est une droite

A08 Soit $ABCD$ un tétraèdre, E et F sont deux points tels que :

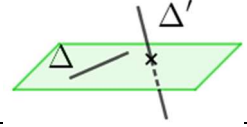
$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

1. Montrer que : $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
2. Les droites (EF) et (BC) sont-elles parallèles ?
3. Les plans (DEF) et (DBC) sont-ils parallèles ?



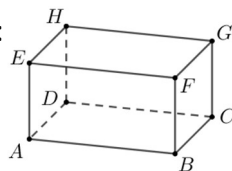
D position relative de deux droites

- deux **droites sont coplanaires** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ il existe un plan contenant ces deux droites
- deux droites coplanaires peuvent être :
 - sécantes** : elles ont un et un seul point en commun appelé point d'intersection de ces deux droites
 - strictement parallèles** : elles n'ont pas de point en commun
 - confondues** : elles ont une infinité de points en commun
- deux droites qui ne sont pas coplanaires sont **non coplanaires** : elles n'ont alors aucun point en commun

droites coplanaires		droites non coplanaires
parallèles	sécantes	non parallèles non sécantes
strictement parallèles 	confondues 	

A09 $ABCDEFGH$ pavé droit, indiquer la position relative :

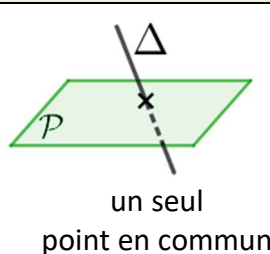
- de (AB) et (EF)
- de (AC) et (EG)
- de (AG) et (BH)
- de (AB) et (HG)
- de (AB) et (CG)
- de (AH) et (BH)



D position relative d'une droite et d'un plan

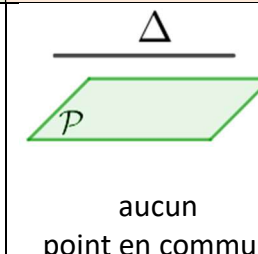
- une **droite** et un **plan** sont **sécants** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ ils ont exactement un point en commun
- une **droite** et un **plan** sont **strictement parallèles** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ ils n'ont aucun point en commun
- une **droite** est **incluse dans d'un plan** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ tous les points de cette droite appartiennent à ce plan (on dit que c'est une droite de ce plan utilise **symbole $\subset$**)

droite et plan sécants

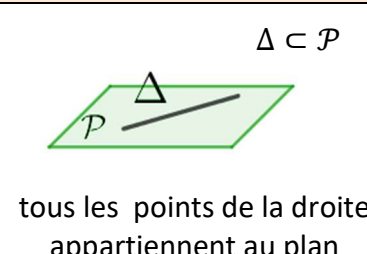


droite et plan parallèles

Strictement parallèle



Droite incluse dans le plan

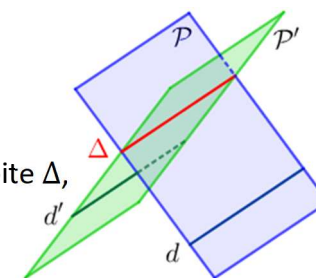


P quelques propriétés

- si un plan contient deux points distincts d'une droite alors il contient tous les points de cette droite
- Une droite Δ est parallèle à un plan $\Leftrightarrow$ il existe une droite de ce plan parallèle à Δ
- deux plans sont parallèles $\Leftrightarrow$ il existe deux droites sécantes du premier plan, parallèles à deux droites sécantes du second plan
- si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe le premier coupe le second et les droites d'intersections obtenues sont parallèles

théorème du toit (admis)

Soient deux droites d et d' parallèles, si $\mathcal{P}$ est un plan contenant d , et $\mathcal{P}'$ est un plan contenant d' , les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ étant sécants suivant la droite Δ , alors $\Delta \parallel d$ et $\Delta \parallel d'$.



A10 [il est corrigé]

Tracer la section du tétraèdre $EFGH$ par le plan (ABC) en laissant Apparents les traits de construction :

Figure 1

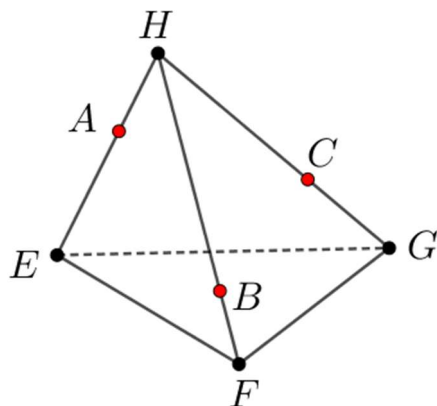
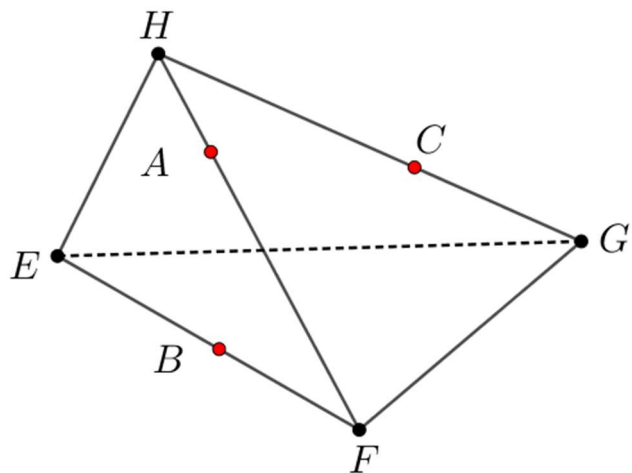
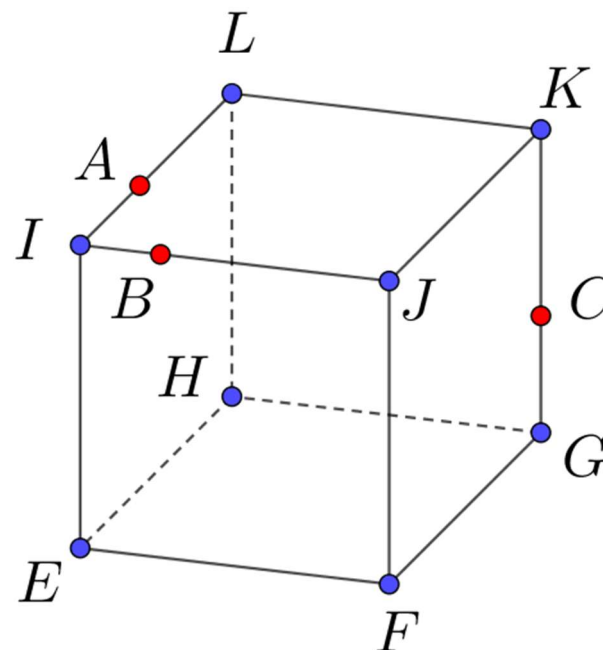


Figure 2



A11 [il est corrigé]

On se propose de déterminer la section du cube $EFGHIJKL$ par le plan (ABC) où A , B et C appartiennent respectivement aux arêtes $[IL]$, $[IJ]$ et $[GK]$ comme indiqué ci-dessous :



- justifier que les droites (AB) et (KL) sont sécantes, puis placer leur point d'intersection R
- justifier que les droites (CR) et (HL) sont sécantes, puis placer leur point d'intersection S
- tracer la section du cube $EFGHIJKL$ par le plan (ABC)

Corrigés

A10

Figure 1

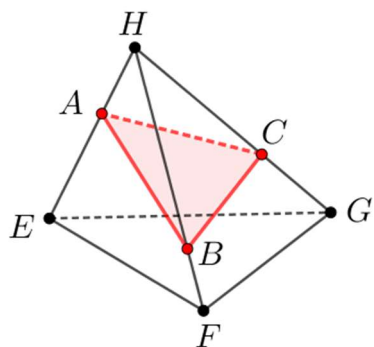
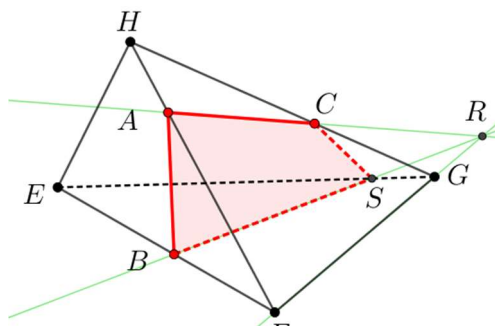
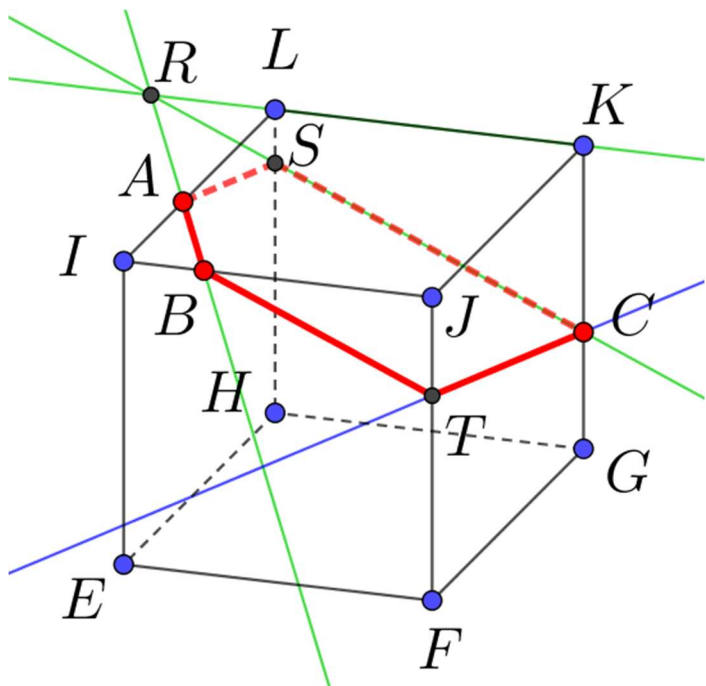


Figure 2



A11



A12 $SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base est un rectangle. Représenter la droite d'intersection des plans (SAB) et (SCD) .

D base et repère d'un plan

- soient A, B et C trois points non alignés, on note $\mathcal{P}$ le plan (ABC) , alors on dit que :
 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est **une base** de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **forment une base** de $\mathcal{P}$,
 $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **sont deux vecteurs directeurs** de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **dirigent** $\mathcal{P}$
- une **base d'un plan** est la donnée de deux vecteurs non colinéaires de ce plan : $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base du plan $\mathcal{P} \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$
- un **repère d'un plan** est la donnée d'un point de ce plan appelé origine du repère et d'une base de ce plan :
 $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de $\mathcal{P} \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} A \in \mathcal{P}$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{P}$

P Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.

Le plan (ABC) est constitué des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

► $M \in (ABC) \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

D base et repère de l'espace

- $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires
- une **base de l'espace** est un triplet de vecteurs non coplanaires
- $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ signifie $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, les nombres x, y et z sont les **coordonnées** de $\vec{u}$
- $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ signifie $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, x est l'**abscisse** du point M ,
 y est l'**ordonnée** du point M et z la **cote** du point M

P quelques propriétés On munit l'espace d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- ▶ on a : $\vec{O} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $O(0; 0; 0)$
- ▶ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathcal{P}$ et $A \in \mathcal{P}$, on a l'équivalence :

M appartient au plan $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow$ il existe $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

- il y a unicité des coordonnées d'un point et unicité de celles d'un vecteur

- Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ et $k \in \mathbb{R}$, alors :

$$\text{▶ } \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}; \vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{pmatrix}; k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}; \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

- ▶ **I milieu de $[AB]$** $\Leftrightarrow x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, y_I = \frac{y_A + y_B}{2}, z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

- $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ les trois déterminants 2×2 extraits

$$\text{sont nuls : } \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0 \quad \left(\begin{smallmatrix} \text{hors programme} \\ \text{mais utile} \end{smallmatrix} \right)$$

A13 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires, $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$, puis $\vec{u} \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$?

A14 $A(1; 4; 3)$, $B(3; 7; 4)$ et $C(9; 16; 7)$ sont-ils alignés ?

A15 $A(1; 5; 2)$, $B(3; 6; 5)$, $C(-5; 1; -1)$, $D(-3; 2; 2)$: montrer que $ABDC$ est un parallélogramme.

A16 $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-il une base de l'espace ?

Rép : non, $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$

D Soit $\mathcal{D}(A; \vec{u})$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$,

alors $M \in \mathcal{D}(A; \vec{u}) \Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_M = x_A + t \times a \\ y_M = y_A + t \times b \\ z_M = z_A + t \times c \end{cases}$.

Ce système est une **représentation paramétrique** de la droite $\mathcal{D}(A; \vec{u})$.

P $\begin{cases} x = \alpha + a \times t \\ y = \beta + b \times t \\ z = \gamma + c \times t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une **représentation paramétrique** de la

droite $\mathcal{D}$ passant par $A(\alpha; \beta; \gamma)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b, c

ne sont pas tous nuls.

Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

A17 Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $A(1; 5; 0)$ et $B(3; 1; 5)$, le point $E(5; -3; 10)$ appartient-il à (AB) ?
Même question pour le point $F(-5; 10; -15)$.

A18 On considère :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 6 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

La droite $\mathcal{D}$ coupe le plan d'équation $z = 0$ en F : déterminer les coordonnées de ce point.

▶ **P** Dans l'espace muni d'un repère tout plan admet une équation de la forme $ax + by + cz = d$ où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

A19 Dans l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z = 3$ coupe l'axe des abscisses $(O; \vec{i})$ en A .

Déterminer les coordonnées du point A .

Procéder de même pour le point B intersection du plan $\mathcal{P}$ avec l'axe des ordonnées $(O; \vec{j})$ et pour le point C intersection du plan $\mathcal{P}$ avec l'axe des cotes $(O; \vec{k})$.

Faire une figure en représentant précisément le triangle ABC .

Résumé

[M] Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace : $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \vec{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix},$

$A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C), D(x_D; y_D; z_D).$

• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

méthode n°1

Règle : deux vecteurs de l'espace sont colinéaires si et seulement si les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls

méthode n°2

On suppose que $\vec{u} \neq \vec{0}$, dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire

qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, puis on résout le système : $\begin{cases} a' = ka \\ b' = kb \\ c' = kc \end{cases}$

méthode n°3

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que leurs coordonnées sont proportionnelles, autrement dit, que sous réserve d'existence des

trois quotients : $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$

• A, B et C sont-ils alignés ?

Dire que A, B et C sont alignés revient à dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

• les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

On justifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, puis on cherche s'il existe

$(k, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{w} = k\vec{u} + t\vec{v}$, c'est-à-dire tel que : $\begin{cases} a'' = ka + ta' \\ b'' = kb + tb' \\ c'' = kc + tc' \end{cases}$

• les quatre points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

méthode n°1 : on justifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires puis on cherche s'il existe $(k, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$

méthode n°2 : si l'on dispose d'une équation $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ du plan (ABC) on regarde si $\alpha x_D + \beta y_D + \gamma z_D + \delta$ est ou non égal à 0.

Soit $\mathcal{D} : \begin{cases} x = \alpha + a \times t \\ y = \beta + b \times t \\ z = \gamma + c \times t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ où a, b, c ne sont pas tous nuls,

$A(\alpha, \beta, \gamma), \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

• sans calcul donner un point de la droite $\mathcal{D}$:

Par exemple $A(\alpha; \beta; \gamma)$, point obtenu pour $t = 0$

• sans calcul donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$: $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

• déterminer les coordonnées d'un point B de $\mathcal{D}, B \neq A(\alpha; \beta; \gamma)$

On donne une valeur particulière non nulle au paramètre t , on obtient alors des valeurs particulières pour x, y et z

• le point C appartient-il à $\mathcal{D}$?

On pose le système $\begin{cases} x_C = \alpha + at \\ y_C = \beta + bt \\ z_C = \gamma + ct \end{cases}$: si les trois lignes donnent la même valeur pour t alors $C \in \mathcal{D}$, sinon le système est « impossible » et $C \notin \mathcal{D}$

• déterminer y_E et z_E sachant que $E \in \mathcal{D}$ (x_E connu)

On pose le système $\begin{cases} x_E = \alpha + at \\ y_E = \beta + bt \\ z_E = \gamma + ct \end{cases}$: de la première ligne on déduit t , puis on remplace dans les deux autres lignes

• $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = \alpha' + a'\lambda \\ y = \beta' + b'\lambda \\ z = \gamma' + c'\lambda \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}, \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles parallèles ?

$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathcal{D}'$:

dire que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles revient à dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Attention : si deux droites de l'espace ne sont pas parallèles, on ne peut pas en déduire qu'elles sont sécantes !

A20C $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires : $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix}$?

A21C $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires : $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 22 \\ 15 \end{pmatrix}$?

A22C Déterminer si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires : $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A23C $E(1; 2; 4)$, $F(4; 0; 3)$, $G(7; -2; 2)$ sont-ils alignés ?

A24C $A(0; 1; 5)$, $B(-1; 0; 7)$, $C(4; 2; 1)$ sont-ils alignés ?

A25C $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\Delta : \begin{cases} x = 4 + k \\ y = 6 + 3k \\ z = 6 + 5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont-elles sécantes et, dans l'affirmative, donner les coordonnées de leur point d'intersection.

A26C $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et $\Delta : \begin{cases} x = 6 - 2k \\ y = 5 - 4k \\ z = 2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$

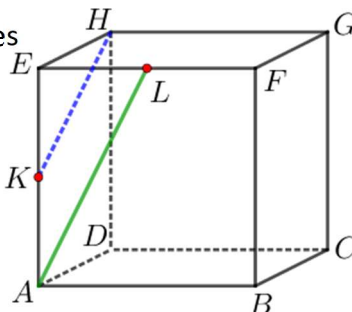
1. Montrer que $\mathcal{D} \parallel \Delta$.
2. Soit $A(5; 3; 1)$: montrer que A appartient à $\mathcal{D}$ et appartient à Δ .
3. Dédurre des questions précédentes la position relative de $\mathcal{D}$ et Δ .

A27C $A(1; 5; 6)$, $B(2; 6; 9)$, $C(5; 3; 12)$ et $D(3; 2; 7)$.

- montrer que A , B et C ne sont pas alignés
- montrer que les points A , B , C et D sont coplanaires

A28C $ABCDEFGH$ est un cube,
 K est le milieu de $[AE]$
 L est le milieu de $[EF]$.

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donner en justifiant les coordonnées de K et H , en déduire les coordonnées de $\overrightarrow{KH}$.
2. Donner sans justification les coordonnées de L , en déduire les coordonnées de $\overrightarrow{AL}$.
3. Les droites (KH) et (AL) sont-elles parallèles ?

A29C $ABCD$ est un tétraèdre, I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ et $[CD]$.

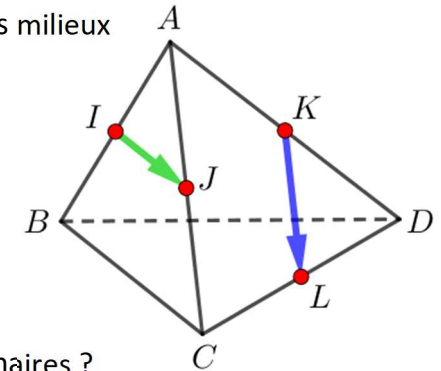
1. Justifier que :

$$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

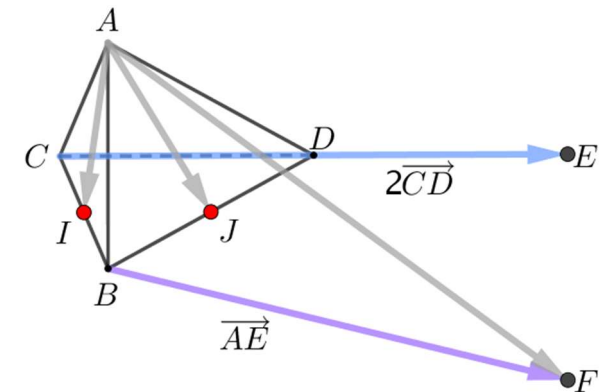
2. Justifier que :

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

3. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont-ils coplanaires ?



A30C $ABCD$ est un tétraèdre, I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[BD]$, E et F sont définis par : $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$.



1. Exprimer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.
2. Démontrer que : $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CD}$, en déduire que : $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{IJ}$.
3. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AF}$?
 Les points A , I , J et F sont-ils coplanaires ?

Corrigés

A20C $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires : $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -10 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix}$?

Méthode n°1

$\vec{u} \neq \vec{0}$, donc dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$: $\begin{cases} -10 = 5k \\ 14 = -7k \\ -12 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -4 \end{cases}$ impossible

Conclusion : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Méthode n°2

Dire que deux vecteurs sont colinéaires revient à dire que les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls.

Or :

$$\begin{vmatrix} 5 & -10 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = 5(-12) - (-10)(3) = -60 + 30 = -30 \neq 0$$

donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Méthode n°3

Dire que deux sont colinéaires revient à dire que leurs coordonnées sont Proportionnelles.

Or : $\frac{-12}{-10} = \frac{6}{5}$ et $\frac{6}{5} \neq \frac{3}{5}$, donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

A21C $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires : $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 22 \\ 15 \end{pmatrix}$?

Dire que deux vecteurs sont colinéaires revient à dire que les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls.

Or : $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = (5)(7) - (-1)(1) = 35 + 1 = 36 \neq 0$,

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont

coplanaires revient à dire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

$$\begin{cases} 2 = 5\alpha - 1\beta \\ 22 = 1\alpha + 7\beta \\ 15 = 3\alpha + 4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha - \beta = 2 \\ \alpha + 7\beta = 22 \\ 3\alpha + 4\beta = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5\alpha - 2 \\ \alpha + 7(5\alpha - 2) = 22 \\ 3\alpha + 4(5\alpha - 2) = 15 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5\alpha - 2 \\ 36\alpha - 14 = 22 \\ 23\alpha - 8 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5\alpha - 2 \\ 36\alpha = 36 \\ 23\alpha = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5\alpha - 2 \\ \alpha = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

On a : $\vec{w} = \vec{u} + 3\vec{v}$, donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

A22C $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires : $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Dire que deux vecteurs sont colinéaires revient à dire que les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls.

Or : $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (0)(2) - (4)(3) = 0 - 12 = -12 \neq 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$:

$$\begin{cases} 4 = 0\alpha + 4\beta \\ 5 = 3\alpha + 2\beta \\ 1 = 1\alpha - 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\beta = 4 \\ 3\alpha + 2\beta = 5 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ 3\alpha + 2(1) = 5 \\ \alpha - 2(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ 3\alpha + 2 = 5 \\ \alpha - 2 = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ 3\alpha = 3 \\ \alpha = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 1 \\ \alpha = 3 \end{cases} \text{ impossible}$$

Conclusion : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

A23C $E(1; 2; 4)$, $F(4; 0; 3)$, $G(7; -2; 2)$ sont-ils alignés ?

Dire que les points E , F et G sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \\ z_F - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 0 - 2 \\ 3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{EG}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_G - x_E \\ y_G - y_E \\ z_G - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 1 \\ -2 - 2 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Méthode n°1

Dire que deux vecteurs sont colinéaires revient à dire que les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls.

Or, on a :

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 3(-4) - 6(-2) = -12 + 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - 6(-1) = -6 + 6 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (-2)(-2) - (-4)(-1) = 4 - 4 = 0$$

donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires, on en déduit que les points **E, F et G sont alignés**.

Méthode n°2

Rappelons que $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

On a :

$$2x_{\overrightarrow{EF}} = 2(3) = 6 = x_{\overrightarrow{EG}}$$

$$2y_{\overrightarrow{EF}} = 2(-2) = -4 = y_{\overrightarrow{EG}}$$

$$2z_{\overrightarrow{EF}} = 2(-1) = -2 = z_{\overrightarrow{EG}}$$

donc : $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG}$, par conséquent $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires, on en déduit que les points **E, F et G sont alignés**.

A24C **A(0; 1; 5), B(-1; 0; 7) et C(4; 2; 1) sont-ils alignés ?**

Dire que les points A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 0 - 1 \\ 7 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ 2 - 1 \\ 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls.

Or :

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times 1 - 4 \times (-1) = -1 + 4 = 3 \neq 0$$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points **A, B et C ne sont pas alignés**.

A25C $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 5 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \Delta : \begin{cases} x = 4 + k \\ y = 6 + 3k \\ z = 6 + 5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont-elles sécantes et, dans l'affirmative, donner les coordonnées de leur point d'intersection.

Dire que $\mathcal{D}$ et Δ ont exactement un point en commun revient à dire qu'il

existe un unique couple $(t, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\begin{cases} 1 + 2t = 4 + k \\ 7 + t = 6 + 3k \\ 5 + 3t = 6 + 5k \end{cases}$$

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 + 2t = 4 + k \\ 7 + t = 6 + 3k \\ 5 + 3t = 6 + 5k \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3 = k \\ t - 3k = -1 \\ 3t - 5k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3 = k \\ t - 3(2t - 3) = -1 \\ 3t - 5(2t - 3) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3 = k \\ -5t + 9 = -1 \\ -7t + 15 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3 = k \\ -5t = -10 \\ -7t = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3 = k \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2(2) - 3 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ t = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

En remplaçant t par sa valeur dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2(2) = 5 \\ y &= 7 + t = 7 + 2 = 9 \\ z &= 5 + 3t = 5 + 3(2) = 11 \end{aligned}$$

Conclusion :

$\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes et leur point d'intersection a pour coordonnées (5; 9; 11).

Remarques

- on peut vérifier les coordonnées du point d'intersection en remplaçant k par sa valeur dans la représentation paramétrique de Δ :

$$\begin{aligned}x &= 4 + 1 = 5 \\y &= 6 + 3(1) = 9 \\z &= 6 + 5(1) = 11\end{aligned}$$

On retrouve bien les coordonnées (5; 9; 11).

- raisonner sur les vecteurs directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}$ et Δ

respectivement ne permet pas de conclure : on montrerait en effet que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc que $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas parallèles, ce qui ne permet pas d'en déduire qu'elles sont sécantes (on est dans l'espace...).

A26C $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et $\Delta : \begin{cases} x = 6 - 2k \\ y = 5 - 4k \\ z = 2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$

1. Montrer que $\mathcal{D} \parallel \Delta$.

$\mathcal{D}$ admet pour vecteur directeur : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\Delta : \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Méthode n°1

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls.

Or, on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times (-4) - (-2) \times 2 = -4 + 4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) - (-2)(-1) = 2 - 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (-4)(-1) = 4 - 4 = 0$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires, par conséquent **les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont parallèles.**

Méthode n°2

On a :

$$\begin{aligned}-2x_{\vec{u}} &= -2(1) = -2 = x_{\vec{v}} \\ -2y_{\vec{u}} &= -2(2) = -4 = y_{\vec{v}} \\ -2z_{\vec{u}} &= -2(-1) = 2 = z_{\vec{v}}\end{aligned}$$

donc : $-2\vec{u} = \vec{v}$, par conséquent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont parallèles.

Les droites sont parallèles donc : soit elles sont strictement parallèles, soit elles sont confondues... la suite de l'exercice va permettre de trancher.

2. Soit $A(5; 3; 1)$: montrer que A appartient à $\mathcal{D}$ et appartient à Δ .

- Montrons que $A \in \mathcal{D}$

Faisons $t = 0$ dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}x &= 5 + t = 5 + 0 = 5 \\ y &= 3 + 2t = 3 + 2(0) = 3 \\ z &= 1 - t = 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

On retrouve les coordonnées de A donc : $A \in \mathcal{D}$.

- Montrons que $A \in \Delta$

Dire que le point $A(5; 3; 1)$ appartient à Δ revient à dire qu'il existe

$$k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} 5 = 6 - 2k \\ 3 = 5 - 4k \\ 1 = 2k \end{cases}.$$

On a les équivalences :

$$\begin{cases} 5 = 6 - 2k \\ 3 = 5 - 4k \\ 1 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 1 \\ 4k = 2 \\ 2k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

On en déduit que : $A \in \Delta$.

3. Déduire des questions précédentes la position relative de $\mathcal{D}$ et Δ .

Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont parallèles et passent par un même point donc **elles sont confondues**.

A27C $A(1; 5; 6)$, $B(2; 6; 9)$, $C(5; 3; 12)$, $D(3; 2; 7)$

• montrer que A , B et C ne sont pas alignés

Dire que les points A , B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 6 - 5 \\ 9 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 3 - 5 \\ 12 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Résumons : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls.

Or, on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2) - 4(1) = -6 \neq 0$$

donc : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent les points A , B et C ne sont pas alignés.

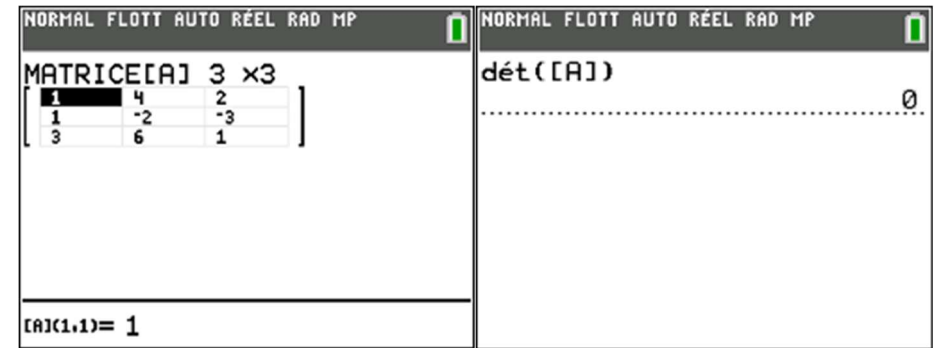
• montrer que les points A , B , C et D sont coplanaires.

Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées : $A(1; 5; 6)$, $B(2; 6; 9)$, $C(5; 3; 12)$, $D(3; 2; 7)$

$$\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \\ z_D - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 2 - 5 \\ 7 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Résumons : $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Utilisation de la calculatrice $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$



Le déterminant de la matrice 3×3 des coordonnées est nul donc les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et les quatre points A , B , C et D sont coplanaires.

Dire que les quatre points A , B , C et D sont coplanaires revient à dire que les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Or, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc dire que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

Rappelons que : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a les équivalences :

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 4\beta \\ -3 = 1\alpha + (-2)\beta \\ 1 = 3\alpha + 6\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta = 2 \\ \alpha - 2\beta = -3 \\ 3\alpha + 6\beta = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - 4\beta \\ 2 - 4\beta - 2\beta = -3 \\ 3(2 - 4\beta) + 6\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta = 2 \\ \alpha - 2\beta = -3 \\ 3\alpha + 6\beta = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - 4\beta \\ 2 - 4\beta - 2\beta = -3 \\ 3(2 - 4\beta) + 6\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - 4\beta \\ -6\beta = -5 \\ 6 - 6\beta = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - 4\beta \\ -6\beta = -5 \\ -6\beta = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - 4\beta \\ \beta = \frac{5}{6} \\ \beta = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 - 4 \times \frac{5}{6} \\ \beta = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{4}{3} \\ \beta = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Conclusion : les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, par conséquent les quatre points A , B , C et D sont coplanaires.

A28 $ABCDEFGH$ est un cube, K est le milieu de $[AE]$ et L est le milieu de $[EF]$.

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner en justifiant les coordonnées de K et H , en déduire les coordonnées de $\overrightarrow{KH}$.

Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$,
on a : $A(0; 0; 0)$ et $E(0; 0; 1)$.

Or, K est le milieu de $[AE]$, donc :

$$\begin{aligned} x_K &= \frac{x_A + x_E}{2} = \frac{0 + 0}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ y_K &= \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{0 + 0}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ z_K &= \frac{z_A + z_E}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

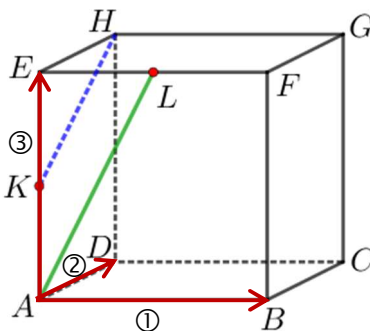
Résumons :

$$K\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} \text{ (Chasles)} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \quad (\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}) \\ &= 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE} \end{aligned}$$

donc : $H(0; 1; 1)$.



$\overrightarrow{KH}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_H - x_K \\ y_H - y_K \\ z_H - z_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 1 - 0 \\ 1 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Résumons :

$$\overrightarrow{KH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Donner sans justification les coordonnées de L , en déduire les coordonnées de $\overrightarrow{AL}$.

On a :

$$L\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \text{ et } \overrightarrow{AL} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Les droites (KH) et (AL) sont-elles parallèles ?

$$\overrightarrow{KH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AL} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dire que deux vecteurs sont colinéaires revient à dire que les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls.

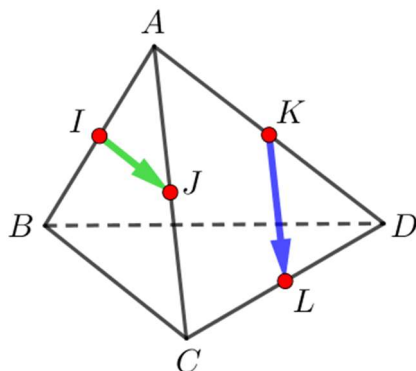
Or, on a :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \times 0 - \frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Donc $\overrightarrow{KH}$ et $\overrightarrow{AL}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent les droites (KH) et (AL) ne sont pas parallèles.

En perspective cavalière : deux droites parallèles sont toujours représentées par deux traits parallèles mais la réciproque est fautive !

A29C $ABCD$ tétraèdre I, J, K et L milieux de $[AB], [AC], [AD], [CD]$



1. Justifier que : $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.

$$\begin{aligned}\vec{IJ} &= \vec{IA} + \vec{AJ} \text{ (Chasles)} \\ &= \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC} \text{ (I milieu de [AB] et J de [AC])} \\ &= \frac{1}{2}(-\vec{AB}) + \frac{1}{2}\vec{AC} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}\end{aligned}$$

On a donc bien : $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.

2. Justifier que : $\vec{KL} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.

$$\begin{aligned}\vec{KL} &= \vec{KD} + \vec{DL} \text{ (Chasles)} \\ &= \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} \text{ (milieux)} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{DC}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{AC} \text{ (Chasles)}\end{aligned}$$

On a donc : $\vec{KL} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.

3. Les vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{KL}$ et $\vec{AB}$ sont-ils coplanaires ?

Méthode n°1

On se place dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ de l'espace, on a :

$$\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + 0\vec{AD} \text{ donc } \vec{IJ} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{KL} = \frac{1}{2}\vec{AC} = 0\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + 0\vec{AD} \text{ donc } \vec{KL} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AC} + 0\vec{AD} \text{ donc } \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilisation de la calculatrice :

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP			NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP		
MATRICE[A] 3 x3			dét([A])		
$-\frac{1}{2}$	0	1	0		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0			
0	0	0			
[A](3,3)= 0					

Le déterminant de la matrice 3×3 des coordonnées des vecteurs est nul donc les trois vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{KL}$ et $\vec{AB}$ sont coplanaires.

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls.

Or, on a :

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} - 0 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \neq 0$$

donc $\vec{IJ}$ et $\vec{KL}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent dire que les trois

vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{IJ} + \beta \overrightarrow{KL}$:

$$\begin{cases} 1 = -\frac{1}{2}\alpha + 0\beta \\ 0 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta \\ 0 = 0\alpha + 0\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha + 0\beta = 1 \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(-\frac{1}{2}\alpha\right) = 2 \times 1 \\ 2\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) = 2 \times 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha = 2 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ -2 + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Conclusion : les trois vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires.

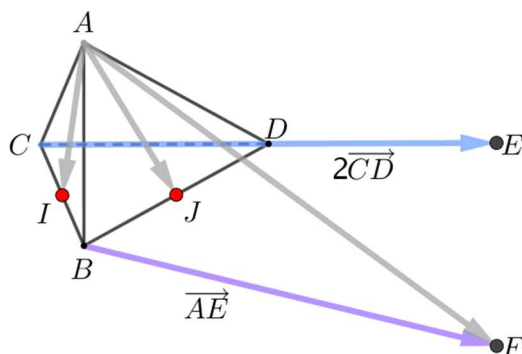
Méthode n°2

$$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB}$$

On a donc : $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KL}$, donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KL}$,

puis : $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{KL}$, donc $\overrightarrow{AB}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires.

A30C $ABCD$ est un tétraèdre, I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[BD]$, E et F sont définis par : $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$.



1. Exprimer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$ (Chasles) $= 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$

Or, I est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

On en déduit que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{AI}$.

Conclusion : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

2. Démontrer que : $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CD}$, en déduire : $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{IJ}$.

• montrons que $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CD}$

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AF} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CA} \text{ (Chasles)} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CA} \text{ (BF = AE)} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CE} \text{ (Chasles)} = 2\overrightarrow{CD} \text{ (CE = 2CD)} \end{aligned}$$

Conclusion : $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CD}$.

• montrons que : $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{IJ}$

On a :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{CD} &= 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) \text{ (Chasles)} \\ &= 2(2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{BJ}) \text{ (I milieu de [BC], J milieu de [BD])} \\ &= 4(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}) = 4\overrightarrow{IJ} \text{ (Chasles)} \end{aligned}$$

Or, $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI}$,

Conclusion : $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{IJ}$.

3. Que peut-on dire de $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AF}$? A , I , J et F sont-ils coplanaires ?

On a vu que $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{IJ}$, donc :

$$\overrightarrow{AF} = 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}) + 2\overrightarrow{AI} = -4\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{AJ}$$

$\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{AJ}$ donc $\overrightarrow{AF}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$, donc les trois vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont coplanaires, donc les quatre points A , I , J et F sont coplanaires.

Autre méthode (non rédigée)

On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$,

on a : $I(0,5; 0,5; 0)$, $J(0,5; 0; 0,5)$, $E(0; -1; 2)$, $F(1; -1; 2)$,

D'où (non rédigé) :

$$\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls.

$$\text{Or : } \begin{vmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 \end{vmatrix} = 0,5 \times 0 - 0,5 \times 0,5 = 0 - 0,25 = -0,25 \neq 0$$

donc $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent, dire que $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AI} + \beta \overrightarrow{AJ}$.

On a les équivalences :

$$\begin{cases} 0,5\alpha + 0,5\beta = 1 \\ 0,5\alpha + 0\beta = -1 \\ 0\alpha + 0,5\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5\alpha + 0,5\beta = 1 \\ \alpha = -2 \\ \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5(-2) + 0,5(4) = 1 \\ \alpha = -2 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2 = 1 \\ \alpha = -2 \\ \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

donc $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AF}$ sont coplanaires, par conséquent les points A, I, J, F sont coplanaires.

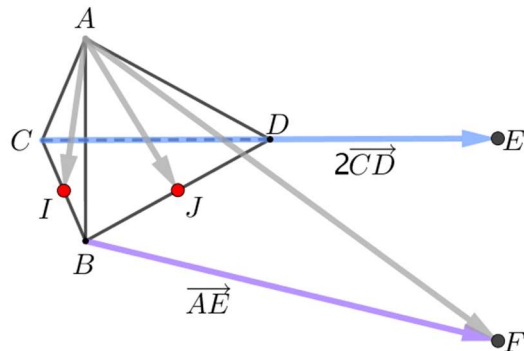
Autre méthode non rédigée

Dans le repère de l'espace $(B; \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ on a : $B(0; 0; 0)$, $D(1; 0; 0)$,

$C(0; 1; 0)$, $A(0; 0; 1)$, $I\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$, $J\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $2 \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$E(2; -1; 0)$, $F(2; -1; -1)$, équation de (AIJ) : $2x + 2y - z - 1 = 0$

$2x_F + 2y_F - z_F - 1 = 2(2) + 2(-1) - (-1) - 1 = 0$ donc $F \in (AIJ)$



En perspective cavalière
il est parfois très difficile
de savoir si quatre points
ou bien trois vecteurs
sont coplanaires ou non.