

ACTIVITES 01. Suite numérique

D $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1; 2; \dots\}$

P (admis) On considère un sous ensemble (une partie) E de $\mathbb{N}$.
Si les deux points suivants sont vérifiés :

- $0 \in E$
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $k \in E$ alors $k + 1 \in E$ (si E contient un entier naturel, alors il contient l'entier naturel suivant)

alors $E = \mathbb{N}$.

► **M** Rédaction d'une démonstration par récurrence

Pour tout entier naturel n , on considère la **proposition** P_n : « ... ».

- initialisation
On vérifie que P_0 : « ... » est vraie.
- hérédité
Soit k un entier naturel pour lequel P_k : « ... » est vraie (hypothèse de récurrence), montrons que P_{k+1} : « ... » est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

A01 $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $u_n = 2^n + 1$.

A02 $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.

D Suite arithmétique, suite géométrique

- une suite est **arithmétique** de **raison** la constante réelle r lorsque l'on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** cette constante r :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$
- une suite est **géométrique** de **raison** la constante réelle q lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par cette constante q : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$

M Montrer qu'une suite est arithmétique ou qu'elle est géométrique

- la suite (u_n) est **arithmétique** de raison r lorsque :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$ avec r constante
- la suite (u_n) est **géométrique** de raison q lorsque :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$ avec q constante

F u_n en fonction de n pour une suite arithmétique ou géométrique

- si (u_n) est **arithmétique** de premier terme u_0 et de raison r ,
alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n \times r$
si le premier terme est u_1 , alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 + (n - 1) \times r$
- si (u_n) est **géométrique** de premier terme u_0 et de raison q ,
alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$
si le premier terme est u_1 , alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 \times q^{n-1}$

A03 Démontrer par récurrence les formules de u_n en fonction de n et u_0 .

A04 a et b sont deux réels donnés, $a \neq 1$, la suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = ax + b$.
On notera ℓ son unique solution.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - \ell$; montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

A05 $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = -3u_n + 8$.

méthode 1

Un élève affirme : « $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-3)^n + 2$ », a-t-il raison ?

méthode 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n - 2$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison, en déduire v_n puis u_n en fonction de n , $n \in \mathbb{N}^*$.

A06 Pour tout entier naturel n , on considère la proposition P_n : « il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $6^n + 1 = 5k$ ».

Montrer que P_n est héréditaire.

Peut-on en déduire que, « pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie » ?

[D] La suite (u_n) est :

- **croissante** lorsque : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$
- **croissante à partir du rang n_0** lorsque :
pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, $u_n \leq u_{n+1}$
- **décroissante** lorsque : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$
- **décroissante à partir du rang n_0** lorsque :
pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n+1}$

[P] Le **signe de $u_{n+1} - u_n$** permet d'obtenir le sens de variation de (u_n) :

- si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est **croissante**
- si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est **décroissante**

A07 Justifier la propriété du signe de $u_{n+1} - u_n$.

► **[P] opérations élémentaires et relation d'ordre**

- si on ajoute ou retranche un même nombre à chaque membre d'une inégalité, alors on conserve le sens de la relation d'ordre
- si on multiplie ou divise chaque membre d'une inégalité par un même nombre non nul, alors :
 - si ce nombre est positif, on conserve le sens de la relation d'ordre
 - si ce nombre est négatif, on inverse le sens de la relation d'ordre

A08 $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,25u_n + 3$.

1. Calculer u_1 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$.
Que peut-on en déduire pour le sens de variation de la suite (u_n) ?

A09 Soit (u_n) une suite et f une fonction vérifiant les conditions :

- f est une fonction croissante sur un intervalle I
- tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à I
- pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On suppose que $u_0 \leq u_1$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
2. On suppose que $u_0 \geq u_1$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

[F] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ou encore : } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

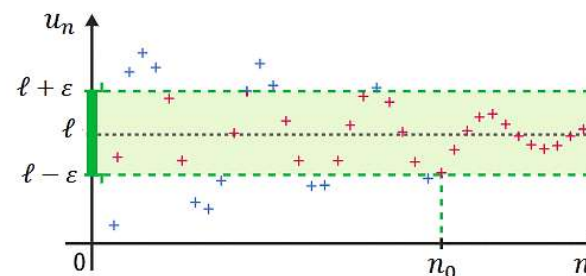
A10 [Oral] Démontrer la formule précédente de deux façons différentes.

[D] La **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ est le réel noté $|x|$ défini par : $|x| = \sqrt{x^2}$.

[P] Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $|x| \geq 0$
- si $x \geq 0$ alors $|x| = x$
- si $x < 0$ alors $|x| = -x$
- $(O; \vec{i})$ est un axe tel que $\|\vec{i}\| = 1$, A et B sont deux points de $(O; \vec{i})$ d'abscisses respectives a et b , alors : $AB = |a - b| = |b - a|$
- pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a l'équivalence : $-\varepsilon < x < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon$

[D] Notion de limite d'une suite



- (u_n) **converge vers** $\ell \in \mathbb{R} \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang, on dit alors que la limite de la suite (u_n) est le réel ℓ et on écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou « $u_n \rightarrow \ell$ »
- (u_n) est **convergente** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ il existe un réel ℓ vers lequel elle converge (on admet l'unicité d'un tel réel ℓ)

► (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n \geq n_0 \text{ alors } |u_n - \ell| < \varepsilon$$

- (u_n) a pour limite $+\infty$ $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les nombres u_n à partir d'un certain rang

On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

► (u_n) a pour limite $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } n \geq n_0 \text{ alors } u_n > A$$

- (u_n) a pour limite $-\infty$ si et seulement si $(-u_n)$ a pour limite $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$$

- une suite est **convergente** lorsqu'elle admet une limite finie ℓ (la limite doit exister et cela doit être un réel ℓ), dans tous les autres cas on dit qu'elle est **divergente**, ou qu'elle **diverge**;
la suite (u_n) est donc divergente lorsque l'on est dans l'un des cas suivants : elle n'admet pas de limite, elle admet pour limite $+\infty$, elle admet pour limite $-\infty$

A11 En revenant à la définition, démontrer que (u_n) converge vers 3 avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3n+1}{n+2}.$$

► Règle : limite d'une somme ℓ et ℓ' sont des réels

si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

A12 Lorsque cela est possible, donner un sens à :

- « $5 + (+\infty)$ »
- « $4 - (+\infty)$ »
- « $(+\infty) + 9$ »
- « $(+\infty) - 129$ »
- « $(+\infty) - (-\infty)$ »
- « $(+\infty) - (+\infty)$ »
- « $(+\infty) + (+\infty)$ »
- « $(-\infty) + (-\infty)$ »
- « $0 - (-\infty)$ »

► Règle : limite d'un produit ℓ et ℓ' sont des réels

si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

Dans les cas comportant $\pm\infty$ le signe de la limite du produit est déterminé par la règle des signes.

A13 Lorsque cela est possible, donner un sens à :

- « $(-2) \times (+\infty)$ »
- « $(-\infty) \times (-3)$ »
- « $(+\infty) \times 0$ »
- « $(-\infty) \times (-\infty)$ »
- « $(+\infty) \times (-\infty)$ »
- « $(+\infty) \times (-7)$ »

[F] Limites de référence

- si k est une constante strictement positive, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} kn = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} kn^2 = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} kn^3 = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} k\sqrt{n} = +\infty$$

- si k est une constante strictement négative, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} kn = -\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} kn^2 = -\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} kn^3 = -\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} k\sqrt{n} = -\infty$$

- pour toute valeur de k :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n^2} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{n^3} = 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} = 0$$

A14 Déterminer la limite de (u_n) :

$$1. u_n = -3n^2 + 80 \quad 2. u_n = -\sqrt{n} + \frac{5}{n^2} \quad 3. u_n = n^3 - n^2 + 1$$

[M] Lorsqu'il y a une indétermination d'une limite avec un polynôme en n : mettre « de force » en facteur la plus grande puissance de n ...

A15 Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 5n^2 - 3n + 2$, $v_n = -3n^2 + 8n + 1$.
Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) .

► **Règle : limite d'un quotient** ℓ et ℓ' sont des réels

si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0⁺ ou 0⁻	0	0⁺ ou 0⁻	$\pm\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	F.I.	$\pm\infty$	F.I.

A16 Si possible, donner un sens à :

- « $\frac{5}{+\infty}$ »
- « $\frac{-7}{-\infty}$ »
- « $\frac{-3}{0^+}$ »
- « $\frac{7}{0^-}$ »
- « $\frac{-2}{0^-}$ »
- « $\frac{+\infty}{-\infty}$ »
- « $\frac{+\infty}{+\infty}$ »
- « $\frac{0^+}{0^-}$ »
- « $\frac{+\infty}{0^-}$ »
- « $\frac{+\infty}{0^+}$ »

A17 Déterminer la limite de (u_n) avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5n - 1}{3n + 1}$$

Retenons qu'il y a **quatre** types de **formes indéterminées** :

- « $\infty - \infty$ »
- « $0 \times \infty$ »
- « $\frac{0}{0}$ »
- « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Attention : une inégalité stricte entre u_n et v_n donnera une inégalité **large** entre leurs limites

► **Théorème de comparaison**

- si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

exemple de rédaction

$$\text{On a : } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{cases},$$

donc, d'après le théorème de comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

A18 Démontrer le premier point du théorème de comparaison.

A19 Pour tout n entier naturel, on pose : $u_n = 3n^2 + (-1)^n$. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

A20 Pour tout n entier naturel, on pose : $w_n = -n^2 + 5 \cos(2n - 1)$. Déterminer la limite de la suite (w_n) .

► **Théorème des gendarmes**

Si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont des suites telles que :

- à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n \leq w_n$
- les suites (u_n) et (w_n) sont **convergentes** et ont **même limite** ℓ

alors la suite (v_n) est **convergente** et sa limite est ℓ .

exemple de rédaction

$$\text{On a : } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{cases}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

A21 Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sin(n) + 2}{n}$$

A22 Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) de terme général :

$$u_n = \frac{3n + (-1)^n}{n + 2}$$

[D] suite majorée, minorée, bornée

- (u_n) est **majorée** par la constante $M \stackrel{\text{déf}}{\iff}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \leq M$
on dit alors que le nombre M est un **majorant** de la suite (u_n)
- (u_n) est **minorée** par la constante $m \stackrel{\text{déf}}{\iff}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $m \leq u_n$,
on dit alors que le nombre m est un **minorant** de la suite (u_n)
- la suite (u_n) est **bornée** $\stackrel{\text{déf}}{\iff}$ elle est à la fois majorée et minorée.

A23 [Oral] Démontrer qu'une suite croissante est minorée.

► Théorème de convergence monotone

- si une suite est **croissante** et **majorée**, alors elle est **convergente**
- si une suite est **décroissante** et **minorée**, alors elle est **convergente**

A24 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 0,6u_n + 8$$

1. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 10 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
2. En déduire que (u_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de (u_n) , justifier que $\ell = 0,6\ell + 8$, en déduire ℓ .

Théorème

- si une suite est **croissante** et **non majorée**, alors elle **diverge** vers $+\infty$
- si une suite est **décroissante** et **non minorée**, alors elle **diverge** vers $-\infty$

A25 [Oral] Justifier à l'oral le premier point du théorème précédent.

Inégalité de Bernoulli

Soit a un réel tel que $a > -1$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$.

A26 Démontrer par récurrence sur n l'inégalité de Bernoulli.

► Règle : limite de q^n

Soit $q \in \mathbb{R}$ une constante, on s'intéresse à la limite éventuelle de q^n :

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

exemple de rédaction Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,8)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n$.

- $-1 < -0,8 < 1$, or si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ (cours), donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,8)^n = 0$
- $2 > 1$, or si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ (cours), donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

A27 Démontrer la règle de la limite de q^n en étudiant successivement les cas suivants : $q = 1, q > 1, 0 < q < 1, q = 0, -1 < q < 0$ et $q \leq -1$.

A28 Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 12^n - 7^n$.

Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

A29 Étudier l'existence d'une limite, la déterminer lorsqu'elle existe :

$$1. u_n = \frac{2^n - 5^n}{3^n + 4^n} \quad 2. u_n = \frac{5^n + (-3)^n}{2^n + 1}$$

A30 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

[F] Formule de la somme des premiers termes

- dans « $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$ » il y a **$(n - p + 1)$** termes ajoutés
nombre de termes ajoutés = différence des indices + 1
- si (u_n) est arithmétique, alors :

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n = \frac{(u_0 + u_n) \times (n + 1)}{2}$$

(premier + dernier terme de la somme) × nombre de termes ajoutés
2

- si (u_n) est géométrique de raison $q \neq 1$, alors :

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

premier terme de la somme × $\frac{1 - q^{\text{nombre de termes ajoutés}}}{1 - q}$