

EXERCICES TYPES CORRIGÉS — Second degré

A forme canonique

A01 Donner la forme canonique de chacune des expressions :

$$f(x) = x^2 + 6x + 1 \quad g(x) = x^2 - 5x + 2 \quad h(x) = x^2 + \frac{7}{3}x - 3$$

Corrigé

Canoniser « à la main » l'expression : $1x^2 + bx + c$

$$\boxed{x^2} + \boxed{bx} + \boxed{c} = \underbrace{\boxed{(x)^2} + \boxed{2(x)\left(\frac{b}{2}\right)} + \boxed{\left(\frac{b}{2}\right)^2}}_{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b^2}{4} + \boxed{c} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \pm \dots$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \boxed{x^2} + \boxed{6x} + \boxed{1} \\ &= \underbrace{\boxed{(x)^2} + \boxed{2(x)(3)} + \boxed{(3)^2}}_{(x+3)^2} - 9 + \boxed{1} \\ &= (x+3)^2 - 8 \end{aligned}$$

Pour tout réel x , on a : $f(x) = (x+3)^2 - 8$ (forme canonique).

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \boxed{x^2} - \boxed{5x} + \boxed{2} \\ &= \underbrace{\boxed{(x)^2} - \boxed{2(x)\left(\frac{5}{2}\right)} + \boxed{\left(\frac{5}{2}\right)^2}}_{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2} - \frac{25}{4} + \boxed{2} \\ &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{8}{4} \\ &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} \end{aligned}$$

Pour tout réel x , on a : $g(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$ (forme canonique)

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= x^2 + \frac{7}{3}x - 3 \\ &= \underbrace{\left(x + \frac{7}{6}\right)^2}_{\left(x + \frac{7}{6}\right)^2} - \frac{49}{36} - 3 \\ &= \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} - \frac{108}{36} \\ &= \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{157}{36} \end{aligned}$$

Pour tout réel x , on a : $h(x) = \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{157}{36}$ (forme canonique)

A02 Donner la forme canonique :

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 1 \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 \quad h(x) = -5x^2 + x - \frac{2}{3}$$

Corrigé

Canoniser « à la main » $ax^2 + bx + c$

On commence par « mettre de force en facteur » a pour obtenir entre crochet une expression $x^2 + \dots x + \dots$ que l'on sait canoniser.

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 4x - 1 \\ &= 3 \left[\frac{3x^2}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \right] \\ &= 3 \left[x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \right] \\ &= 3 \left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + 2(x)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - \frac{1}{3} \right] \\ &= 3 \left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - \frac{3}{9} \right] \end{aligned}$$

$$= 3 \left[\left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{7}{9} \right]$$

$$= 3 \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{7}{3}$$

Pour tout réel x , on a : $f(x) = 3 \left(x + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{7}{3}$ (forme canonique)

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{1}x + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[x^2 - 3 \times \frac{2}{1}x + 1 \times \frac{2}{1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [x^2 - 6x + 2]$$

$$= \frac{1}{2} [(x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2 - 9 + 2]$$

$$= \frac{1}{2} [(x - 3)^2 - 7]$$

$$= \frac{1}{2} (x - 3)^2 - \frac{7}{2}$$

Pour tout réel x , on a : $g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - \frac{7}{2}$ (forme canonique)

• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h(x)$$

$$= -5x^2 + x - \frac{2}{3}$$

$$= -5 \left[\frac{-5x^2}{-5} + \frac{x}{-5} - \frac{\frac{2}{3}}{-5} \right]$$

$$= -5 \left[x^2 - \frac{x}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \right]$$

$$= -5 \left[x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{2}{15} \right]$$

$$= -5 \left[(x)^2 - 2(x) \left(\frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{10} \right)^2 - \frac{1}{100} + \frac{2}{15} \right]$$

$$= -5 \left[\left(x - \frac{1}{10} \right)^2 + \frac{37}{300} \right]$$

$$= -5 \left(x - \frac{1}{10} \right)^2 - 5 \times \frac{37}{5 \times 60}$$

$$= -5 \left(x - \frac{1}{10} \right)^2 - \frac{37}{60}$$

Pour tout réel x , on a : $h(x) = -5 \left(x - \frac{1}{10} \right)^2 - \frac{37}{60}$ (forme canonique)

A03 Donner la forme canonique de $f(x) = (x - 2)(-x + 5)$.

Corrigé

$$f(x)$$

$$= (x - 2)(-x + 5)$$

$$= -x^2 + 5x + 2x - 10$$

$$= -x^2 + 7x - 10$$

$$= -[x^2 - 7x + 10]$$

$$= - \left[(x)^2 - 2(x) \left(\frac{7}{2} \right) + \left(\frac{7}{2} \right)^2 - \frac{49}{4} + 10 \right]$$

$$= - \left[\left(x - \frac{7}{2} \right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{40}{4} \right]$$

$$= - \left[\left(x - \frac{7}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \right]$$

$$= - \left(x - \frac{7}{2} \right)^2 + \frac{9}{4}$$

Pour tout réel x , on a : $f(x) = - \left(x - \frac{7}{2} \right)^2 + \frac{9}{4}$ (forme canonique)

A04 Préciser les valeurs respectives de a, α, β pour chacune des formes canoniques : $f(x) = 3(x - 5)^2 - 7$ et $g(x) = -(x + 2,5)^2 + 3$.

Corrigé

Définition La forme canonique s'écrit : $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

- $f(x) = 3(x - 5)^2 - 7$

On a : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $a = 3, \alpha = 5$ et $\beta = -7$.

- $g(x) = -(x + 2,5)^2 + 3$

Remarquons que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (-1) \times (x - (-2,5))^2 + 3$.

On a : $g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = -1, \alpha = -2,5$ et $\beta = 3$.

A05 À l'aide des formules du cours, donner la forme canonique de $f(x)$ telle que, pour tout réel x : $f(x) = -x^2 + 8x + 3$.

Corrigé

Formule : forme canonique de $ax^2 + bx + c, a \neq 0$

Pour tout réel $x, f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, la forme canonique s'écrit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

$-x^2 + 8x + 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1, b = 8$ et $c = 3$.

On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-1)} = +4$$

$$\beta = f(\alpha) = -(4)^2 + 8(4) + 3 = -16 + 32 + 3 = 19$$

La forme canonique s'écrit $a(x - \alpha)^2 + \beta$ donc, pour tout réel x , on a :

$$f(x) = -(x - 4)^2 + 19 \text{ (forme canonique).}$$

A06 Déterminer « à la main » (sans utiliser les formules du cours) la forme canonique :

$$A(x) = x^2 + 6x + 10 \quad B(x) = -x^2 + 10x - 3 \quad C(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

Corrigé

$$A(x) = x^2 + 6x + 10$$

$$A(x) = (x)^2 + 2(x)(3) + (3)^2 - 9 + 10$$

Pour tout réel x , on a : $A(x) = (x + 3)^2 + 1$ (forme canonique).

$$B(x) = -x^2 + 10x - 3$$

$$B(x) = -[x^2 - 10x + 3]$$

$$B(x) = -[(x)^2 - 2(x)(5) + (5)^2 - 25 + 3]$$

$$B(x) = -[(x - 5)^2 - 22]$$

Pour tout réel x , on a : $B(x) = -(x - 5)^2 + 22$ (forme canonique).

$$C(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

$$C(x) = 2 \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{5}{2} \right]$$

$$C(x) = 2 \left[x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \right]$$

$$C(x) = 2 \left[(x)^2 - 2(x) \left(\frac{3}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{5}{2} \right]$$

$$C(x) = 2 \left[\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{40}{16} \right]$$

$$C(x) = 2 \left[\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{31}{16} \right]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, C(x) = 2 \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{31}{8} \text{ (forme canonique)}$$

A07 Pour tout réel x , on pose : $f(x) = 7x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{2}{3}$.

À l'aide des formules du cours, déterminer la forme canonique de $f(x)$.

Corrigé

$7x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{2}{3}$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 7, b = \frac{5}{4}$ et $c = \frac{2}{3}$.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{5}{4}}{2(7)} = \frac{-\frac{5}{4}}{14} = -\frac{5}{4} \times \frac{1}{14} = -\frac{5 \times 1}{4 \times 14} = -\frac{5}{56}$$

$$\beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{5}{56}\right) = 7\left(-\frac{5}{56}\right)^2 + \frac{5}{4}\left(-\frac{5}{56}\right) + \frac{2}{3} = \frac{821}{1\,344}$$

La forme canonique s'écrit : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Pour tout réel x , on a :

$$f(x) = 7 \left(x + \frac{5}{56} \right)^2 + \frac{821}{1\,344} \text{ (forme canonique)}$$

B factorisation

B01 Factoriser dans $\mathbb{R}$: $A(x) = 6x^2 - 7x$ et $B(x) = -4x^2 + 9x$.

factoriser $ax^2 + bx$

Il suffit de remarquer que l'on peut mettre x en facteur.

Corrigé

- $A(x) = 6x^2 - 7x = x(6x - 7)$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, A(x) = x(6x - 7)$. (forme factorisée)

- $B(x) = -4x^2 + 9x = x(-4x + 9)$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, B(x) = x(-4x + 9)$. (forme factorisée)

B02 Factoriser dans $\mathbb{R}$, lorsque cela est possible :

$$C(x) = x^2 - 4 \quad D(x) = 9x^2 - 16 \quad E(x) = x^2 - 7$$

$$F(x) = 5x^2 - 3 \quad G(x) = x^2 + 7 \quad H(x) = -4x^2 - 13$$

Corrigé

factoriser $ax^2 + c, a \neq 0$, lorsque cela est possible

On tente de se ramener à la forme $(\dots)^2 - (\dots)^2$, qui se factorise en utilisant l'identité : $(A)^2 - (B)^2 = (A + B)(A - B)$.

☞ les formes suivantes ne sont pas factorisables dans $\mathbb{R}$:

$(A)^2 + k^2$ et $-(A)^2 - k^2$, avec k constante réelle non nulle.

- $C(x) = x^2 - 4 = (x)^2 - (2)^2 = (x + 2)(x - 2)$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, C(x) = (x + 2)(x - 2)$. (forme factorisée)

- $D(x) = 9x^2 - 16 = (3x)^2 - (4)^2 = (3x + 4)(3x - 4)$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, D(x) = (3x + 4)(3x - 4)$. (forme factorisée)

- $E(x) = x^2 - 7 = (x)^2 - (\sqrt{7})^2 = (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) = (x + \sqrt{7})(x - \sqrt{7})$. (forme factorisée)

- $F(x) = 5x^2 - 3 = (x\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = (x\sqrt{5} + \sqrt{3})(x\sqrt{5} - \sqrt{3})$

$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = (x\sqrt{5} + \sqrt{3})(x\sqrt{5} - \sqrt{3})$. (forme factorisée)

- $G(x) = x^2 + 7 = (x)^2 + (\sqrt{7})^2$; or $x^2 + (\sqrt{7})^2$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$ donc $G(x)$ n'est **pas factorisable** dans $\mathbb{R}$

- $H(x) = -4x^2 - 13 = -(2x)^2 - (\sqrt{13})^2$; or $(-2x)^2 - (\sqrt{13})^2$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$ donc $H(x)$ n'est **pas factorisable** dans $\mathbb{R}$

B03 Factoriser dans $\mathbb{R}$:

$$I(x) = 2x^2 + 11x - 13 \text{ et } J(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$$

Corrigé

Pour une expression du second degré ayant **trois** termes, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ puis les racines réelles éventuelles :

- si $\Delta > 0$, une factorisation est : $a(x - x_1)(x - x_2)$

- si $\Delta = 0$, une factorisation est : $a(x - x_0)^2$

- si $\Delta < 0$, il n'y a pas de factorisation dans $\mathbb{R}$

- $I(x) = 2x^2 + 11x - 13$

$2x^2 + 11x - 13$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2, b = 11$

et $c = -13$, son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (11)^2 - 4(2)(-13) = 121 + 104 = 225$$

On constate que $\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 - \sqrt{225}}{2(2)} = \frac{-11 - 15}{4} = \frac{-26}{4} = -\frac{13}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11 + \sqrt{225}}{2(2)} = \frac{-11 + 15}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Or, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (cours) donc pour tout réel x :

$$I(x) = 2 \left(x + \frac{13}{2} \right) (x - 1) \text{ (forme factorisée)}$$

autre factorisation : $I(x) = (2x + 13)(x - 1)$.

On peut vérifier au brouillon en développant la forme factorisée obtenue :

$$(2x + 13)(x - 1) = 2x^2 - 2x + 13x - 13 = 2x^2 + 11x - 13 = I(x) \quad \checkmark$$

$$\bullet J(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -1$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(-1) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4}$$

On constate que $\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{1} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{1} = 2$$

Or, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (cours)

donc : $\forall x \in \mathbb{R}, J(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)$ ou encore :

$$J(x) = (x + 1)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$$

On peut vérifier au brouillon en développant la forme factorisée obtenue :

$$(x + 1)\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = J(x)$$

B04 Factoriser dans $\mathbb{R}$, lorsque cela est possible :

$$K(x) = -x^2 + 12x - 36 \text{ et } L(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$$

Corrigé

$$\bullet K(x) = -x^2 + 12x - 36$$

$-x^2 + 12x - 36$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 12$ et $c = -36$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4(-1)(-36) = 144 - 144 = 0$$

On constate que $\Delta = 0$ donc il y a une seule racine :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-1)} = +\frac{12}{2} = 6$$

Or, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, K(x) = -(x - 6)^2$.

On peut vérifier au brouillon en développant la forme factorisée obtenue :

$$-(x - 6)^2 = -(x^2 - 12x + 36) = -x^2 + 12x - 36 = K(x)$$

$$\bullet L(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$$

$\frac{1}{4}x^2 - x + 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = \frac{1}{4}$, $b = -1$ et $c = 1$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)(1) = 1 - 1 = 0$$

On constate que $\Delta = 0$ donc il y a une seule racine :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{+1}{2\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \times \frac{2}{1} = 2$$

Or, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ (cours) donc : $\forall x \in \mathbb{R}, L(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^2$.

On peut vérifier au brouillon en développant la forme factorisée obtenue :

$$\frac{1}{4}(x - 2)^2 = \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = L(x)$$

B05 Factoriser dans $\mathbb{R}$, si cela est possible : $M(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

Corrigé

$3x^2 - 2x + 5$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = -2$ et $c = 5$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(5) = 4 - 60 = -56$.

On constate que $\Delta < 0$ donc $M(x)$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

C équation du second degré

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, sont les racines de $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c$ admet une racine double : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ n'admet pas de racine réelle.

C01 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x - 1)(2x + 3) = 8x + 12$.

Corrigé

On va se ramener à un second membre nul.

$(x - 1)(2x + 3) = 8x + 12 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2x - 3 = 8x + 12$
 $\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2x - 8x - 3 - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 15 = 0$
 $2x^2 - 7x - 15$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -7$ et $c = -15$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(-15) = 49 + 120 = 169$$

On constate que $\Delta > 0$ donc $2x^2 - 7x - 15$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 - \sqrt{169}}{2(2)} = \frac{7 - 13}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + \sqrt{169}}{2(2)} = \frac{7 + 13}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

L'équation de départ admet pour solutions : $-\frac{3}{2}$ et 5.

On écrit aussi :

$$S = \left\{-\frac{3}{2}; 5\right\} \text{ ou encore : } S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{3}{2}; 5\right\}$$

C02 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4x(x + 5) = -25$.

Corrigé

On va se ramener à un second membre nul.

On a : $4x(x + 5) = -25 \Leftrightarrow 4x^2 + 20x + 25 = 0$.

$4x^2 + 20x + 25$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 4$, $b = 20$ et $c = 25$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (20)^2 - 4(4)(25) = 400 - 400 = 0$$

On constate que $\Delta = 0$ donc $4x^2 + 20x + 25$ admet une seule racine :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(4)} = -\frac{4 \times 5}{4 \times 2} = -\frac{5}{2}$$

L'équation $4x(x + 5) = -25$ admet pour unique solution : $-\frac{5}{2}$.

Autre méthode

$$4x^2 + 20x + 25 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 + 2(2x)(5) + (5)^2 = 0 \Leftrightarrow (2x + 5)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

C03 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 - 5x + 10 = 0$.

Corrigé

$x^2 - 5x + 10$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -5$ et $c = 10$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(10) = 25 - 40 = -15$.
On constate que $\Delta < 0$ donc $x^2 - 5x + 10$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ par conséquent $x^2 - 5x + 10 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

C04 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2(x^2 - 9) = 52$.

Corrigé

$$x^2(x^2 - 9) = 52 \Leftrightarrow x^4 - 9x^2 = 52 \Leftrightarrow x^4 - 9x^2 - 52 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x^2)^2 - 9(x^2) - 52 = 0$$

En posant $X = x^2$, cette équation s'écrit : $X^2 - 9X - 52 = 0$.

$X^2 - 9X - 52$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 1$, $b = -9$ et $c = -52$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(1)(-52) = 81 + 208 = 289$$

On constate que $\Delta > 0$ donc l'équation $X^2 - 9X - 52$ admet deux racines :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+9 - \sqrt{289}}{2(1)} = \frac{9 - 17}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$
$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+9 + \sqrt{289}}{2(1)} = \frac{9 + 17}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

On a donc $X = -4$ ou $X = 13$, or $X = x^2$, donc : $x^2 = -4$ ou $x^2 = 13$.

- $x^2 = -4$ est de la forme $x^2 = k$ avec $k < 0$ donc n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

• $x^2 = 13 \Leftrightarrow x = -\sqrt{13} \text{ ou } x = \sqrt{13}$.

Conclusion

L'équation de départ admet pour solutions : $-\sqrt{13}$ et $\sqrt{13}$.

C05 Pour tout réel x , on pose : $P(x) = x^2 - (3 + 2\sqrt{3})x + 6\sqrt{3}$.

1. Vérifier que 3 est une racine du polynôme P .

2. Déterminer astucieusement la deuxième racine de P .

Corrigé

1. $P(3) = 3^2 - (3 + 2\sqrt{3}) \times 3 + 6\sqrt{3} = 9 - 9 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 0$.

On constate que $P(3) = 0$ donc 3 est bien une racine du polynôme P .

2. En notant $x_1 = 3$ et x_2 la deuxième racine de P , on a :

$$3 \times x_2 = \frac{6\sqrt{3}}{1} \Leftrightarrow 3 \times x_2 = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow x_2 = \frac{6\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x_2 = 2\sqrt{3}$$

La deuxième racine de P est : $2\sqrt{3}$.

C06 La somme de deux nombres réels est égale à 7 et leur produit est égal à 12 : quels sont ces deux nombres ?

Corrigé

En notant x et y les deux nombres cherchés, on a : $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$

On a les équivalences :

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - x \\ x(7 - x) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - x \\ -x^2 + 7x - 12 = 0 \end{cases}$$

$x^2 - 7x + 12$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -7$ et $c = 12$,

de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(12) = 49 - 48 = 1$.

On constate que $\Delta > 0$ donc $x^2 - 7x + 12$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 - \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{7 - 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{7 + 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Si $x = 3$, alors : $y = 7 - x = 7 - 3 = 4$.

Si $x = 4$, alors : $y = 7 - 4 = 3$.

Il y a donc deux couples solutions : $(3 ; 4)$ et $(4 ; 3)$, par conséquent

les deux nombres cherchés sont donc 3 et 4.

C07 Résoudre l'équation :

$$\frac{5x + 1}{x + 2} = -x + 3$$

Corrigé

• domaine d'existence

Le dénominateur $x + 2$ doit être non nul, or : $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

Il y a donc une seule valeur interdite : -2 .

On écrit parfois $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-2\}$ ou encore $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

• résolution

Pour $x \neq -2$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{5x + 1}{x + 2} = -x + 3 &\Leftrightarrow \frac{5x + 1}{x + 2} \times (x + 2) = (-x + 3) \times (x + 2) \\ &\Leftrightarrow 5x + 1 = -x^2 - 2x + 3x + 6 \Leftrightarrow 5x + 1 + x^2 + 2x - 3x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \end{aligned}$$

$x^2 + 4x - 5$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 4$, $c = -5$,

de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36$.

On constate que $\Delta > 0$ donc $x^2 + 4x - 5$ admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{-4 - 6}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{-4 + 6}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

(-5) et 1 sont distincts de la valeur interdite (-2) donc sont acceptés.

Conclusion

L'équation de départ admet pour solutions : -5 et 1 .

D sens de variation

D01 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$.

Étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f .

Corrigé

Sens de variation de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c, a \neq 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

• si $a > 0$, alors :

f est $\searrow$ sur $] -\infty; \alpha]$ et f est $\nearrow$ sur $[\alpha; +\infty[$
(lorsque $a > 0$ on pense à une courbe « sourire »)

• si $a < 0$, alors :

f est $\nearrow$ sur $] -\infty; \alpha]$ et f est $\searrow$ sur $[\alpha; +\infty[$
(lorsque $a < 0$ on pense à une courbe « pas sourire »)

$2x^2 - 8x + 5$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2, b = -8$ et $c = 5$.

On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{+8}{2(2)} = \frac{8}{4} = 2$$

$a > 0$ donc :

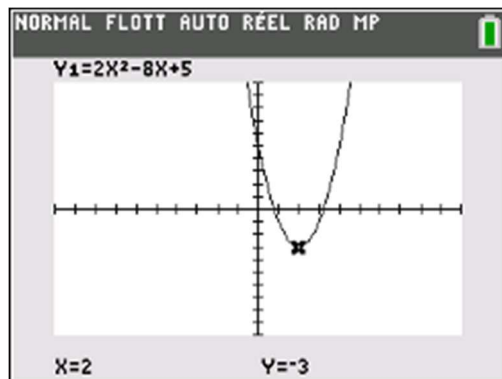
f est strictement décroissante sur $] -\infty; \alpha]$ i.e. sur $] -\infty; 2]$

f est strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$ i.e. sur $[2; +\infty[$

$$\beta = f(\alpha) = f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 5 = 8 - 16 + 5 = -3$$

tableau de variation de f

x	$-\infty$	$\alpha = 2$	$+\infty$
Sens de variation de f		$\searrow \quad \beta = -3 \quad \nearrow$	



D02 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 8x + 1$.

Étudier le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f .

Corrigé

$-x^2 + 8x + 1$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1, b = 8$ et $c = 1$. On a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(-1)} = \frac{-8}{-2} = +4$$

$a < 0$ donc :

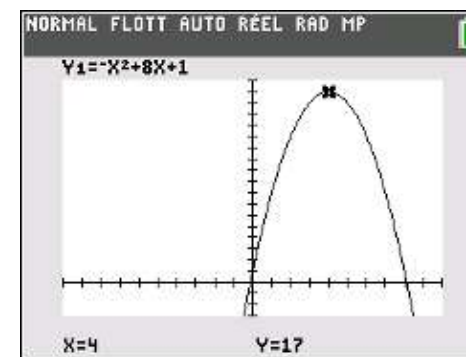
f est strictement croissante sur $] -\infty; \alpha]$ i.e. sur $] -\infty; 4]$

f est strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$ i.e. sur $[4; +\infty[$

$$\beta = f(\alpha) = f(4) = -(4)^2 + 8(4) + 1 = -16 + 32 + 1 = 17$$

tableau de variation de f

x	$-\infty$	$\alpha = 4$	$+\infty$
Sens de variation de f		$\nearrow \quad \beta = 17 \quad \searrow$	



E inéquation

E01 Dresser le tableau de signes de $x^2 + 2x - 35$, $x \in \mathbb{R}$.

En déduire les solutions de l'inéquation : $x(x + 2) < 35$.

Corrigé

On a les équivalences :

$$x(x + 2) < 35 \Leftrightarrow x^2 + 2x < 35 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 35 < 0$$

$x^2 + 2x - 35$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = -35$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(1)(-35) = 4 + 140 = 144$.

$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{144}}{2(1)} = \frac{-2 - 12}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{144}}{2(1)} = \frac{-2 + 12}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Règle $ax^2 + bx + c$ est « du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	-7	5	$+\infty$	
$x^2 + 2x - 35$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+



La dernière ligne de ce tableau de signes montre que l'ensemble des solutions de $x^2 + 2x - 35 < 0$ est :

$$S =] - 7 ; 5 [$$

E02 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(2x - 3)(x + 1) \geq 3x^2 - 4$.

Corrigé

On a les équivalences :

$$(2x - 3)(x + 1) \geq 3x^2 - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 3x - 3 \geq 3x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 \geq 3x^2 - 4 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 - 3x^2 + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - x + 1 \geq 0$$

$-x^2 - x + 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = -1$ et $c = 1$,

de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-1)(1) = 1 + 4 = 5$

$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1 - \sqrt{5}}{2(-1)} = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,62$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+1 + \sqrt{5}}{2(-1)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,62$$

Règle $ax^2 + bx + c$ est « du signe de a à l'extérieur des racines ».

tableau de signes

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$	
$-x^2-x+1$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$



Le tableau de signes précédent donne l'ensemble des solutions :

$$S = \left[\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right]$$

F parabole [complément]

F01 On munit le plan d'un repère orthonormé.

La parabole $\mathcal{P}$ représentative de $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ admet pour sommet $S(4; 1)$ et passe par $A(6; -3)$.

1. Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
2. Vérifier que, pour tout réel x , on a : $f(x) = -x^2 + 8x - 15$.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des abscisses.

Corrigé

1. forme canonique de $f(x)$

Le sommet S a pour coordonnées $x_S = 4$ et $y_S = 1$.

Or $x_S = \alpha$ et $y_S = \beta$ (cours) donc : $\alpha = 4$ et $\beta = 1$.

Par ailleurs, la forme canonique s'écrit : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ (cours).

Donc, pour tout réel x : $f(x) = a(x - 4)^2 + 1$.

Or, on sait que $A(6; -3)$ appartient à la parabole représentative de f donc $f(6) = -3$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} a(6 - 4)^2 + 1 &= -3 \Leftrightarrow a \times (2)^2 + 1 = -3 \Leftrightarrow a \times 4 + 1 = -3 \\ \Leftrightarrow 4a &= -4 \Leftrightarrow a = -1 \end{aligned}$$

Pour tout réel x , on a : $f(x) = -(x - 4)^2 + 1$ (forme canonique).

2. Vérifier que, pour tout réel x , on a : $f(x) = -x^2 + 8x - 15$

Développons le membre de gauche de l'égalité à démontrer :

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x - 4)^2 + 1 \\ &= -(x^2 - 8x + 16) + 1 \\ &= -x^2 + 8x - 16 + 1 \\ &= -x^2 + 8x - 15 \end{aligned}$$

On obtient finalement le membre de droite de l'égalité à démontrer.

On a donc bien, pour tout réel x : $f(x) = -x^2 + 8x - 15$.

3. $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en deux points : abscisses de ces points

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$:

$-x^2 + 8x - 15 = 0$ est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -1$,

$b = 8$ et $c = -15$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(-1)(-15) = 64 - 60 = 4$$

$\Delta > 0$ $-x^2 + 8x - 15$ admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-8 - 2}{-2} = \frac{-10}{-2} = +5 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-8 + 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = +3 \end{aligned}$$

Les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses ont pour abscisses respectives : **3** et **5**.

Autre méthode

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et de l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -(x - 4)^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1^2 - (x - 4)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow [1 + (x - 4)][1 - (x - 4)] &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 + x - 4)(1 - x + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 3)(-x + 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } -x + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 5 \end{aligned}$$

Les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses ont pour abscisses respectives : **3** et **5**.

