

Exercices 1^{ère} Spé maths : Trigonométrie**Thiaude P.****EXO 01 (avec formules des angles associés)**

On pose :

$$A = \cos\left(1 \times \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right)$$

$$B = \cos\left(1 \times \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3 \times \frac{\pi}{4}\right)$$

$$C = \cos\left(1 \times \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(3 \times \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(4 \times \frac{\pi}{5}\right)$$

Vérifier que $A = 0$ et $B = 0$.En rappelant la formule des angles associés utilisée, calculer C .Corrigé

$$A = \cos\left(1 \times \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$B = \cos\left(1 \times \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3 \times \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$C = \cos\left(1 \times \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(3 \times \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(4 \times \frac{\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

On a :

$$\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi + 4\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} = \pi$$

donc :

$$\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$$

de même :

$$\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \frac{2\pi + 3\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} = \pi$$

donc :

$$\frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$$

D'où

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right)$$

Or, pour tout réel x on a : $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, donc :

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \text{ et } \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

On obtient :

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

Finalement : $C = 0$.**EXO 02 (avec formules des angles associés)**

On pose :

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right), B = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \text{ et } C = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$$

Vérifier que $A = 0$ et $B = 0$.En rappelant la formule des angles associés utilisée, calculer C .Corrigé

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$B = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$$

On a :

$$\frac{6\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{6\pi - \pi}{5} = \frac{5\pi}{5} = \pi$$

donc :

$$\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$$

On en déduit que :

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)$$

Or, pour tout réel x : $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ donc : $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

On en déduit que :

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$$

Finalement : $C = 0$.

EXO 03 (avec formules des angles associés)

En rappelant les formules des angles associés utilisée, calculer :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

Corrigé

On a d'une part :

$$\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

donc :

$$\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

et d'autre part :

$$\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

donc :

$$\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

Or,

- pour tout réel x on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ (*)
- pour tout réel x on a : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ (**).

On a :

$$\begin{aligned} A &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad (\text{en utilisant (*) et (**)}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Finalement : $A = 0$.

EXO 04 (avec formules des angles associés)

On pose :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) \sin\left(\frac{13\pi}{30}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{15}\right) \cos\left(\frac{13\pi}{30}\right)$$

En rappelant la formule des angles associés utilisée, calculer A .

Corrigé

On a :

$$\frac{\pi}{15} + \frac{13\pi}{30} = \frac{2\pi}{30} + \frac{13\pi}{30} = \frac{15\pi}{30} = \frac{\pi}{2}$$

donc :

$$\frac{13\pi}{30} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}$$

Or,

- pour tout réel x , $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{15}\right)$ (*)
- pour tout réel x , $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{15}\right)$ (**)

On a :

$$\begin{aligned} A &= \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) \sin\left(\frac{13\pi}{30}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{15}\right) \cos\left(\frac{13\pi}{30}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{15}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) \cos\left(\frac{\pi}{15}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{15}\right) \sin\left(\frac{\pi}{15}\right) \quad (\text{en utilisant (*) et (**)}) \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{15}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right) \end{aligned}$$

Or, pour tout réel x , on a : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{15}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{15}\right) = 1$

Finalement : $A = 1$.

EXO 05 Équation trigonométrique

Résoudre dans $] -\pi; \pi]$ l'équation : $2 \sin^2(x) + 2 = 5 \sin(x)$.

Corrigé

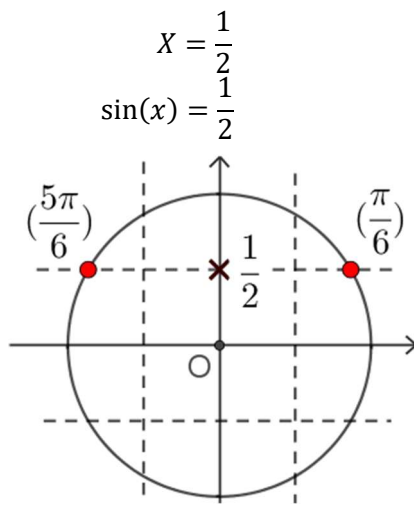
L'équation $2 \sin^2(x) + 2 = 5 \sin(x)$ s'écrit aussi : $2 \sin^2(x) - 5 \sin(x) + 2 = 0$.

En posant $X = \sin(x)$, elle devient : $2X^2 - 5X + 2 = 0$.

$2X^2 - 5X + 2$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 2, b = -5$ et $c = 2$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(2) = 25 - 16 = 9$.

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

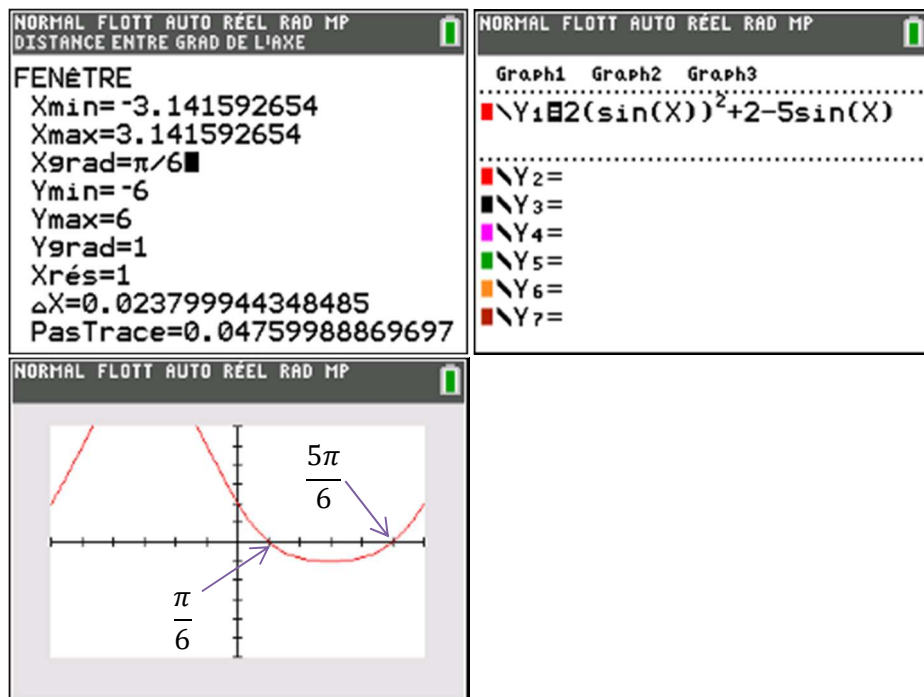
$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 - \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ X_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 + \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5 + 3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{aligned}$$



ou

$X = 2$
 $\sin(x) = 2$
 $2 \notin [-1; 1]$
 donc équation impossible

Conclusion : $S_{]-\pi; \pi]} = \left\{ \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\}$.



EXO 06 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \times (\sin x - \cos x) + \cos x \times (\sin x + \cos x) = 1$.

Corrigé

Rappel $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1 (*)$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
 & \sin x \times (\sin x - \cos x) + \cos x \times (\sin x + \cos x) \\
 &= \sin^2 x - \sin x \times \cos x + \cos x \times \sin x + \cos^2 x \\
 &= \sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \times \cos x + \sin x \times \cos x \\
 &= 1 + 0 \text{ (en utilisant (*))} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \times (\sin x - \cos x) + \cos x \times (\sin x + \cos x) = 1$.

EXO 07 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Démontrer que pour tout réel x : $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

Corrigé

Rappel $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1 (*)$

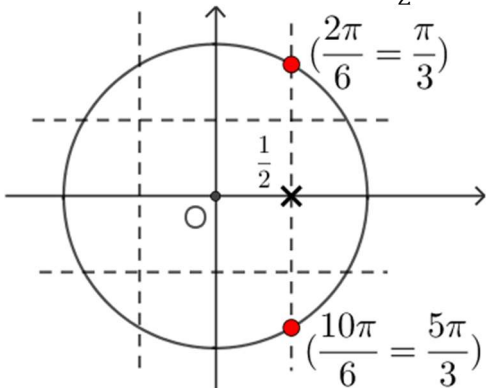
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
 & (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 \\
 &= \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x \\
 &= 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x \\
 &= 2(\sin^2 x + \cos^2 x) \\
 &= 2 \times 1 \text{ (en utilisant (*))} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

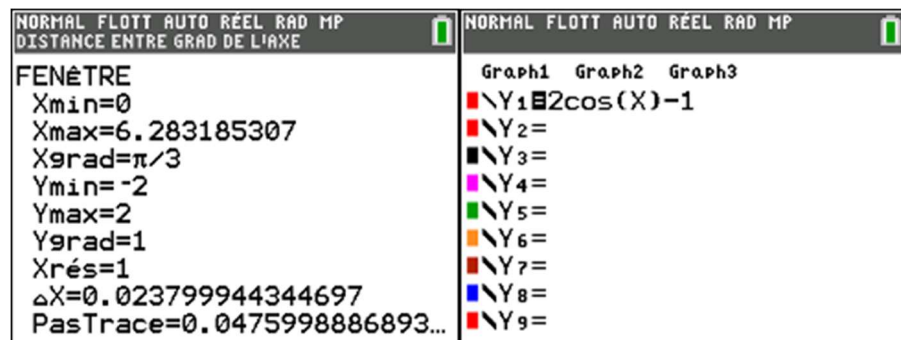
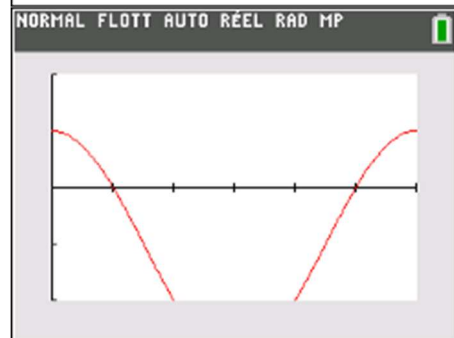
On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

EXO 08 équation trigonométriqueRésoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation : $2 \cos(x) - 1 = 0$.**Corrigé**

$$2 \cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(x) = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$$



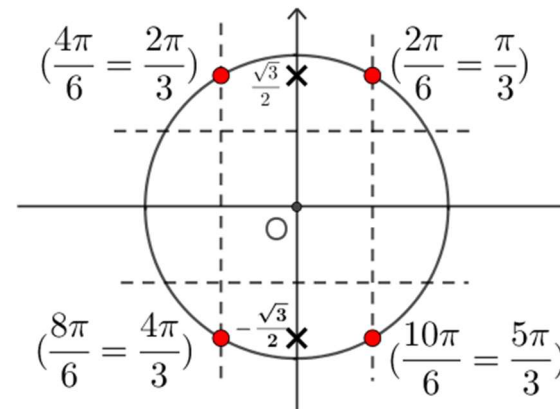
$$S_{[0;2\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$$

**EXO 09** équation trigonométriqueRésoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation : $4 \times \sin^2 x - 3 = 0$.**Corrigé**

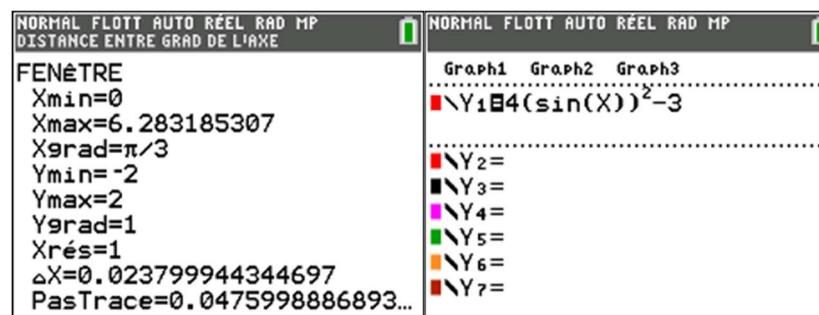
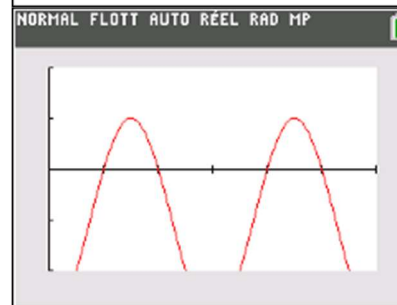
$$4 \times \sin^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2 \sin(x))^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin(x) + \sqrt{3})(2 \sin(x) - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin(x) + \sqrt{3} = 0 \text{ ou } 2 \sin(x) - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$S_{[0;2\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$$



EXO 10

On admet la formule :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

1. Dédurre de cette formule que, pour tout réel x on a :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

2. En déduire la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3. On admet que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sont positif.

Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

4. Démontrer que la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ obtenue à la question 3. et celle proposée par la calculatrice sont égales.

Corrigé

Admis : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

1. Dédurre de cette formule que, pour tout réel x on a :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

En posant $a = b = x$ dans la formule (*), on obtient :

$$\cos(x + x) = \cos(x) \cos(x) - \sin(x) \sin(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

D'où : $\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2 \cos^2(x) - 1$.

On a : $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$ ce qui s'écrit : $1 + \cos(2x) = 2 \cos^2 x$

ou encore :

$$\frac{1 + \cos(2x)}{2} = \cos^2 x$$

On a donc bien, pour tout réel x :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

2. En déduire la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

On a donc finalement :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

3. On admet que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sont positif.

Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = +\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} \text{ ou } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Finalement :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{4}{4} - \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{4 - (2 + \sqrt{3})}{4}$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{4 - 2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

Donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = +\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} \text{ ou } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

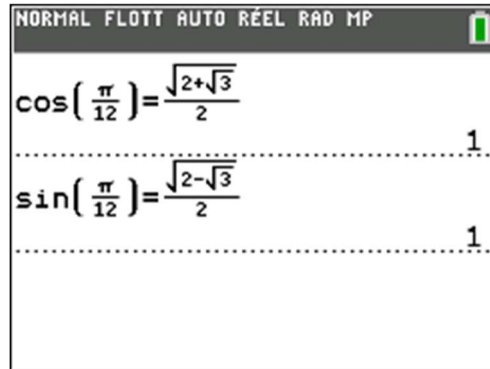
Or, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Finalement :

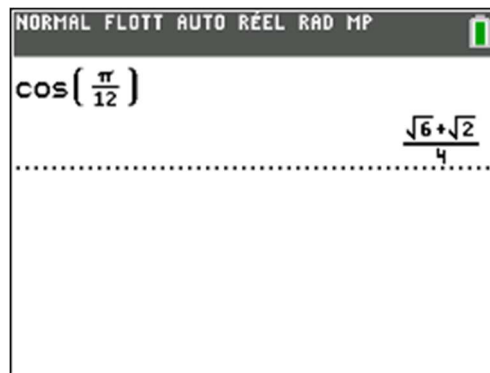
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

«Vérification» à la calculatrice



4. Démontrer que la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ obtenue à la question 3. et celle proposée par la calculatrice sont égales.

On obtient à la calculatrice :



Rappelons que pour a et b réels de même signe, on a :

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$$

Les nombres $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ sont tous deux positifs, donc ils sont de même signe. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 \\ &= \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}{2^2} - \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2+\sqrt{3}}{4} - \frac{(\sqrt{6})^2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{16} \\ &= \frac{4(2+\sqrt{3})}{16} - \frac{6 + 2\sqrt{2} \times 3 \times \sqrt{2} + 2}{16} \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3} - (6 + 2\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{2} + 2)}{16} \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3} - (6 + 2 \times (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{3} + 2)}{16} \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3} - (6 + 4\sqrt{3} + 2)}{16} \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3} - 8 - 4\sqrt{3}}{16} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 0$$

autrement dit :

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

Résumons

Les nombres $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ sont de même signe et ont des carrés égaux donc ils sont égaux.

EXO 11 valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

On admet que :

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ (*)
- pour tout polynôme P et tout réel a , on a l'équivalence :

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) \text{ est factorisable par } (x - a)$$

1. Dédurre de la formule (*) que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

2. En rappelant la formule des angles associés utilisée, montrer que :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$$

3. Démontrer que :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1$$

En déduire que :

$$8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0 \quad (**)$$

Dans toute la suite on pose, pour tout réel x : $P(x) = 8x^4 - 8x^2 + x + 1$.

4. a. Vérifier que $P(-1) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
 b. En déduire une factorisation de $P(x)$ sous forme de produit de deux polynômes du second degré.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

Par lecture graphique sur le cercle trigonométrique, comparer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\frac{1}{2}$

puis déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Corrigé

On admet que :

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ (*)
- pour tout polynôme P et tout réel a , on a l'équivalence :

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) \text{ est factorisable par } (x - a)$$

1. Dédurre de la formule (*) que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

En posant $a = b = x$ dans la formule (*), on obtient :

$$\cos(x + x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

D'où : $\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$.

On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

2. En rappelant la formule des angles associés utilisée, montrer que :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$$

Remarquons que :

$$\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} = \pi$$

donc :

$$\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

Pour $x = \frac{\pi}{5}$ on obtient :

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$$

3. Démontrer que :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 8\cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1$$

On a :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) &= \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{5}\right) \\ &= 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 \\ &= 2\left[\cos\left(2 \times \frac{\pi}{5}\right)\right]^2 - 1 \\ &= 2\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1\right]^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(4 \cos^4 \left(\frac{\pi}{5} \right) - 4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) (1) + (1)^2 \right) - 1 \\
&= 8 \cos^4 \left(\frac{\pi}{5} \right) - 8 \cos^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) + 2 - 1 \\
&= 8 \cos^4 \left(\frac{\pi}{5} \right) - 8 \cos^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) + 1
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) = 8 \cos^4 \left(\frac{\pi}{5} \right) - 8 \cos^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) + 1$$

En déduire que :

$$8 \cos^4 \left(\frac{\pi}{5} \right) - 8 \cos^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{5} \right) + 1 = 0 \quad (**)$$

On a vu que $\cos \left(\frac{4\pi}{5} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{5} \right) = 0$, donc en remplaçant $\cos \left(\frac{4\pi}{5} \right)$ par son expression donnée par (**), on obtient :

$$8 \cos^4 \left(\frac{\pi}{5} \right) - 8 \cos^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) + 1 + \cos \left(\frac{\pi}{5} \right) = 0$$

$$8 \cos^4 \left(\frac{\pi}{5} \right) - 8 \cos^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{5} \right) + 1 = 0$$

Dans toute la suite on pose, pour tout réel x : $P(x) = 8x^4 - 8x^2 + x + 1$.

4. a. Vérifier que $P(-1) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

On a :

$$P(-1) = 8(-1)^4 - 8(-1)^2 + (-1) + 1 = 8 - 8 - 1 + 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{2}\right) &= 8\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 8 \times \frac{1}{16} - 8 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \\
&= \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} + 1 = 2 - 2 = 0
\end{aligned}$$

On a donc bien : $P(-1) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

b. En déduire qu'il existe des réels a , b et c tels que pour tout réel x :

$$P(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c)$$

$P(-1) = 0$ donc $P(x)$ est factorisable par $(x - (-1))$ i.e. $(x + 1)$,

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ donc $P(x)$ est factorisable par $\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

On en déduit que $P(x)$ est factorisable par $(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Or, on a :

$$(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{2}x + x - \frac{1}{2} = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$P(x)$, qui est de degré 4, est factorisable par $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ qui est de degré 2 donc il existe Q du second degré tel que

$$P(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)Q(x)$$

Q étant du second degré on en déduit qu'il existe trois constantes réelles a , b et c telles que $Q(x) = ax^2 + bx + c$, donc telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c)$$

c. Déterminer a , b et c .

Le terme de plus haute degré de $P(x)$ est $8x^4$ et celui du membre de droite est ax^4 donc $a = 8$.

le terme constant de $P(x)$ est 1 et celui du membre de droite est $-\frac{1}{2}c$ donc $-\frac{1}{2}c = 1$ autrement dit $c = -2 \times 1 = -2$.

On a donc pour tout réel x :

$$P(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)(8x^2 + bx - 2)$$

Enfin le terme en x^3 de $P(x)$ est $0x^3$ et celui du membre de droite est $(b + 4)x^3$ donc $b + 4 = 0$ autrement dit $b = -4$.

On en déduit que : $a = 8$, $b = -4$ et $c = -2$ autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)(8x^2 - 4x - 2)$$

5. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)(8x^2 - 4x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \text{ ou } 8x^2 - 4x - 2 = 0$$

Les solutions de $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ sont (-1) et $\frac{1}{2}$.

$$8x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(4x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 1 = 0$$

$4x^2 - 2x - 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 4$, $b = -2$ et $c = -1$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(4)(-1) = 4 + 16 = 20$.

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 - 2\sqrt{5}}{2(4)} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{2 \times 4} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 + 2\sqrt{5}}{2(4)} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{2 \times 4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

L'équation $P(x) = 0$ admet donc quatre solutions réelles distinctes :

$$-1, \frac{1}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \text{ et } \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

b. Par lecture graphique sur le cercle trigonométrique, comparer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

et $\frac{1}{2}$ puis déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

On a démontré que à la question 3. que :

$$8 \cos^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 8 \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 = 0 \quad (**)$$

ce qui s'écrit aussi, avec la définition du polynôme P :

$$P\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = 0$$

autrement dit $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est l'une des solutions réelles de $P(x) = 0$.

Or, par lecture graphique sur le cercle trigonométrique on « voit » que

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$ et la seule racine de P strictement supérieure à $\frac{1}{2}$ est $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$

donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

« Vérification » à la calculatrice

