

EXERCICES CORRIGÉS – Second degré

E01 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 + (10 - x)^2 = 68$.

Corrigé

$$\begin{array}{l|l} x^2 + (10 - x)^2 = 68 & \Leftrightarrow (x - 5)^2 - 9 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 100 - 20x + x^2 = 68 & \Leftrightarrow (x - 5)^2 - 3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 100 - 68 = 0 & \Leftrightarrow (x - 5 + 3)(x - 5 - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 32 = 0 & \Leftrightarrow (x - 2)(x - 8) = 0 \\ \Leftrightarrow 2(x^2 - 10x + 16) = 0 & \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ou } x - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 & \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 8 \\ \Leftrightarrow (x - 5)^2 - 25 + 16 = 0 & \end{array}$$

L'équation de départ admet pour solutions : 2 et 8.

On peut aussi utiliser la méthode plus habituelle du discriminant.

E02 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 2\,030$.

Corrigé

On a les équivalences :

$$\begin{array}{l|l} x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 2\,030 & \Leftrightarrow (x + 1)^2 - 676 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 2\,030 & \Leftrightarrow (x + 1)^2 - (26)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 5 - 2\,030 = 0 & \Leftrightarrow (x + 1 + 26)(x + 1 - 26) = 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 2025 = 0 & \Leftrightarrow (x + 27)(x - 25) = 0 \\ \Leftrightarrow 3(x^2 + 2x - 675) = 0 & \Leftrightarrow x + 27 = 0 \text{ ou } x - 25 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 675 = 0 & \Leftrightarrow x = -27 \text{ ou } x = 25 \\ \Leftrightarrow (x)^2 + 2(x)(1) + (1)^2 - 1 - 675 = 0 & \end{array}$$

L'équation de départ admet pour solutions : -27 et 25.

On peut aussi utiliser la méthode plus habituelle du discriminant.

Vérification de l'une des solutions



E03 On note (E) l'équation d'inconnue réelle x :

$$x^2\sqrt{6} + (\sqrt{6} - 4\sqrt{2})x - 4\sqrt{2} = 0$$

Vérifier que (-1) est une solution, puis déterminer astucieusement l'autre solution.

Corrigé

1. $x^2\sqrt{6} + (\sqrt{6} - 4\sqrt{2})x - 4\sqrt{2} = 0$

Calculons la valeur prise par le membre de gauche lorsque $x = -1$:

$$\begin{aligned} & (-1)^2 \times \sqrt{6} + (\sqrt{6} - 4\sqrt{2}) \times (-1) - 4 \times \sqrt{2} \\ &= 1 \times \sqrt{6} - \sqrt{6} + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

On constate que : $(-1)^2 \times \sqrt{6} + (\sqrt{6} - 4\sqrt{2}) \times (-1) - 4 \times \sqrt{2} = 0$
donc (-1) est bien une solution de l'équation (E).

2. L'équation (E) : $x^2\sqrt{6} + (\sqrt{6} - 4\sqrt{2})x - 4\sqrt{2} = 0$ est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{6} - 4\sqrt{2}$ et $c = -4\sqrt{2}$

La formule du produit des racines s'écrit :

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Or, on a montré que $x_1 = -1$ est l'une des solutions, donc :

$$\begin{aligned} (-1) \times x_2 &= \frac{-4\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ x_2 &= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

La deuxième solution de (E) est : $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Autres méthodes possibles

- on peut utiliser la formule de la somme des racines
- on peut utiliser la méthode habituelle du discriminant qui amène, pour cette équation, à des calculs un peu délicats.

E04 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 2$.

On note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de f dans un repère orthogonal du plan et $\mathcal{D}$ la droite passant par les points $A(-2; 1)$ et $B(3; 6)$.

Étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

Corrigé

La droite (AB) admet pour équation $y = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 1}{3 - (-2)} = \frac{5}{3 + 2} = \frac{5}{5} = 1$$

On obtient donc : $y = 1(x - (-2)) + 1$ qui s'écrit aussi : $y = x + 2 + 1$ soit finalement $y = x + 3$. Pour étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = f(x) \end{cases}, \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 3x + 2 \end{cases}$$

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 3x + 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ x + 3 = -x^2 + 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ (x - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 3 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

La parabole $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ ont un seul point en commun : $I(1; 4)$.

E05 On note (E_m) l'équation d'inconnue réelle x et de paramètre réel m : $x^2 + (m + 1)x + 5m^2 + 1 = 0$.

Existe-t-il une valeur de m pour laquelle l'équation (E_m) admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$?

Corrigé

$x^2 + (m + 1)x + 5m^2 + 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$,

$b = m + 1$ et $c = 5m^2 + 1$, de discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta_m &= b^2 - 4ac = (m + 1)^2 - 4(1)(5m^2 + 1) \\ &= m^2 + 2m + 1 - 4(5m^2 + 1) = m^2 + 2m + 1 - 20m^2 - 4 \\ &= -19m^2 + 2m - 4 \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\Delta_m = -19m^2 + 2m - 4$.

$-19m^2 + 2m - 4$ est de la forme $am^2 + bm + c$ avec $a = -19$, $b = 2$

et $c = -4$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-19)(-4) = -300$

$\Delta < 0$ donc : $-19m^2 + 2m - 4$ n'a pas de racine réelle.

Or, lorsque $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine réelle, elle est toujours du signe

de a et ne s'annule jamais, donc : $-19m^2 + 2m - 4$ est toujours du signe de (-19) et ne s'annule jamais : pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\Delta_m < 0$ par conséquent il n'existe pas de valeur de m pour laquelle (E_m) admette au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

E06 Dans le plan muni d'un repère orthogonal on donne $A(1; 3)$ et $B(4; 9)$, $\mathcal{P}$ est la parabole représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x + 3)(-x + 6)$.

Déterminer les coordonnées du(des) point(s) commun(s) à $\mathcal{P}$ et (AB) .

Corrigé

Une équation de la droite (AB) est $y = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9 - 3}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

On obtient : $y = 2(x - 1) + 3$ qui s'écrit aussi : $y = 2x + 1$.

La droite (AB) admet pour équation réduite : $y = 2x + 1$.

Les coordonnées des points communs à $\mathcal{P}$ et (AB) sont les solutions

$$\text{du système : } \begin{cases} y = ax + b \\ y = f(x) \end{cases}, \text{ autrement dit : } \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = (2x + 3)(-x + 6) \end{cases}$$

d'où par comparaison :

$$2x + 1 = (2x + 3)(-x + 6) \Leftrightarrow 2x + 1 = -2x^2 + 12x - 3x + 18$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = -2x^2 + 9x + 18 \Leftrightarrow 2x + 1 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 17 = 0$$

$2x^2 - 7x - 17$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -7$ et $c = -17$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(-17) = 49 + 136 = 185$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 - \sqrt{185}}{2(2)} = \frac{7 - \sqrt{185}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + \sqrt{185}}{2(2)} = \frac{7 + \sqrt{185}}{4}$$

$$\bullet \text{ si } x = \frac{7 - \sqrt{185}}{4}$$

$$y = 2x + 1 = 2 \times \frac{7 - \sqrt{185}}{4} + 1 = \frac{7 - \sqrt{185} + 2}{2} = \frac{9 - \sqrt{185}}{2}$$

• si $x = \frac{7+\sqrt{185}}{4}$

$$y = 2x + 1 = 2 \times \frac{7+\sqrt{185}}{4} + 1 = \frac{7+\sqrt{185}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{7+\sqrt{185}+2}{2} = \frac{9+\sqrt{185}}{2}$$

Conclusion

$\mathcal{P}$ et (AB) ont en commun les deux points :

$$E\left(\frac{7-\sqrt{185}}{4}; \frac{9-\sqrt{185}}{2}\right) \text{ et } F\left(\frac{7+\sqrt{185}}{4}; \frac{9+\sqrt{185}}{2}\right)$$

1	$f(x) := (2x+3)(-x+6)$ ☐ → $f(x) := -2x^2 + 9x + 18$
2	$A := (1, 3)$ ☐ → $A := (1, 3)$
3	$B := (4, 9)$ ☐ → $B := (4, 9)$
4	$d := \text{Droite}(A, B)$ ☐ → $d : y = 2x + 1$
5	$\text{Intersection}(f, d)$ ☐ → $\left\{ \left(\frac{-\sqrt{185}+7}{4}, \frac{-\sqrt{185}+9}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{185}+7}{4}, \frac{\sqrt{185}+9}{2} \right) \right\}$

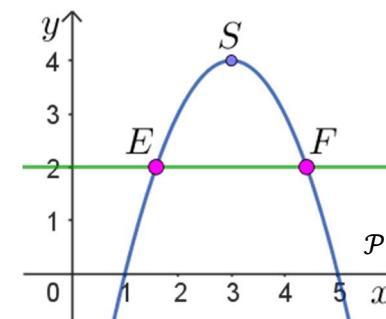
E07 [complément]

Dans le plan muni d'un repère orthogonal on note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

On note S le sommet de $\mathcal{P}$, E et F les points d'intersection de $\mathcal{P}$ et la droite d'équation $y = 2$, avec $x_E < x_F$.

La droite (ES) , non tracée sur la figure, passe-t-elle par le point O ?



Corrigé

• **déterminer les coordonnées de S**

Avec les notations du cours, on a $S(\alpha; \beta)$ avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\beta = f(\alpha) = f(3) = -(3)^2 + 6(3) - 5 = -9 + 18 - 5 = 4$$

Conclusion : $S(3; 4)$.

• **déterminons les coordonnées de E**

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et d sont les solutions

du système : $\begin{cases} y = 2 \\ y = f(x) \end{cases}$, autrement dit : $\begin{cases} y = 2 \\ y = -x^2 + 6x - 5 \end{cases}$, d'où par comparaison : $-x^2 + 6x - 5 = 2$, qui s'écrit aussi : $-x^2 + 6x - 7 = 0$. $-x^2 + 6x - 7$ est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = -7$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(-1)(-7) = 36 - 28 = 8$$

$\Delta > 0$ donc $-x^2 + 6x - 7$ admet deux racines réelles distinctes.

On a : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 2\sqrt{2}}{2(-1)} = \frac{-2(3 + \sqrt{2})}{-2 \times 1} = 3 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 2\sqrt{2}}{2(-1)} = \frac{-2(3 - \sqrt{2})}{-2 \times 1} = 3 - \sqrt{2}$$

Or $x_E < x_F$ et $y_E = y_F = 2$ donc : $E(3 - \sqrt{2}; 2)$ et $F(3 + \sqrt{2}; 2)$, en particulier $E(3 - \sqrt{2}; 2)$.

- les points O , E et S sont-ils alignés ?

Méthode 1 : utilisation de vecteurs

$$\overrightarrow{OE} \begin{pmatrix} x_E - x_O \\ y_E - y_O \end{pmatrix} = \overrightarrow{OE} \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{2} - 0 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OE} \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

On obtient de même : $\overrightarrow{OS} \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 4 - 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{OS} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\det(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OS}) = \begin{vmatrix} 3 - \sqrt{2} & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (3 - \sqrt{2})(4) - (3)(2) = 12 - 4\sqrt{2} - 6 = 6 - 4\sqrt{2}$$

On constate que $\det(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OS}) \neq 0$ donc $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OS}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent les points O , E et S ne sont pas alignés, autrement dit la droite (ES) ne passe pas par le point O .

Méthode 2 [Non rédigée]

On cherche l'équation réduite de (ES) et on constate que son ordonnée à l'origine est non nulle, ce qui permet d'en déduire qu'elle ne passe pas par l'origine O du repère.

E08 Résoudre l'inéquation :

$$\frac{1}{x-1} + \frac{5}{x+1} \leq \frac{x^2}{x^2-1}$$

Corrigé

- recherche des valeurs interdites

Il faut que : $x - 1 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$ et $x^2 - 1 \neq 0$, c'est-à-dire : $x \neq -1$ et $x \neq 1$. Les valeurs interdites sont : -1 et 1 .

- Pour x différent de -1 et de 1 , on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} + \frac{5}{x+1} &\leq \frac{x^2}{x^2-1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{5}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1 \times (x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{5(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x+1+5(x-1)-x^2}{(x-1)(x+1)} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x+1+5x-5-x^2}{(x-1)(x+1)} &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+6x-4}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire $Q(x) \leq 0$, où : $Q(x) = \frac{-x^2+6x-4}{(x-1)(x+1)}$.

[Non rédigé] $-x^2 + 6x - 4$ admet pour racines : $3 - \sqrt{5} (\approx 0,76)$ et $3 + \sqrt{5} (\approx 5,24)$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	$3 - \sqrt{5}$	1	$3 + \sqrt{5}$	$+\infty$			
$-x^2 + 6x - 4$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$		
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$		
$Q(x)$	$-$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$+$	0	$-$

On souhaite que $Q(x)$ soit négatif ou nul, la dernière du tableau de signes donne alors pour ensemble des solutions :

$$S =] - \infty; -1[\cup [3 - \sqrt{5}; 1[\cup [3 + \sqrt{5}; +\infty[$$

1

$1/(x-1)+5/(x+1) \leq x^2/(x^2-1)$
 Résoudre: $\left\{ x < -1, -\sqrt{5} + 3 \leq x < 1, x \geq \sqrt{5} + 3 \right\}$

E09 Résoudre l'inéquation :

$$x^2 - x + 1 \leq \frac{x+3}{3x+1}$$

Corrigé

- recherche de valeur(s) interdite(s)

Il faut que $3x + 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -\frac{1}{3}$. La valeur interdite est : $-\frac{1}{3}$.

- résolution

Pour $x \neq -\frac{1}{3}$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &\leq \frac{x+3}{3x+1} \\ \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{x+3}{3x+1} &\leq \frac{x+3}{3x+1} - \frac{x+3}{3x+1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{x+3}{3x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - x + 1)(3x+1)}{3x+1} - \frac{x+3}{3x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - x + 1)(3x+1) - (x+3)}{3x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^3 + x^2 - 3x^2 - x + 3x + 1 - x - 3}{3x+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^3 - 2x^2 + x - 2}{3x+1} \leq 0$$

$3x^3 - 2x^2 + x - 2$ s'annule pour $x = 1$ donc est factorisable par $(x - 1)$,
il existe une constante réelle b telle que :

$$3x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x - 1)(3x^2 + bx + 2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 + x - 2 = 3x^3 + bx^2 + 2x - 3x^2 - bx - 2$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 + x - 2 = 3x^3 + (b - 3)x^2 + (2 - b)x - 2$$

d'où par identification :

$$\begin{cases} b - 3 = -2 \\ 2 - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 + 3 \\ -b = 1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ -b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow b = 1$$

L'inéquation de départ est donc équivalente à :

$$\frac{(x - 1)(3x^2 + x + 2)}{3x + 1} \leq 0$$

$$\bullet x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

• $3x^2 + x + 2$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(3)(2) = 1 - 24 = -23$

$\Delta < 0$ donc $3x^2 + x + 2$ n'a pas de racine réelle.

Règle « $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a et ne s'annule pas ».

On obtient finalement le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$x - 1$	-	-	0	+
$3x^2 + x + 2$	+	+	+	+
$3x + 1$	-	0	+	+
$Q(x)$	+	-	0	+

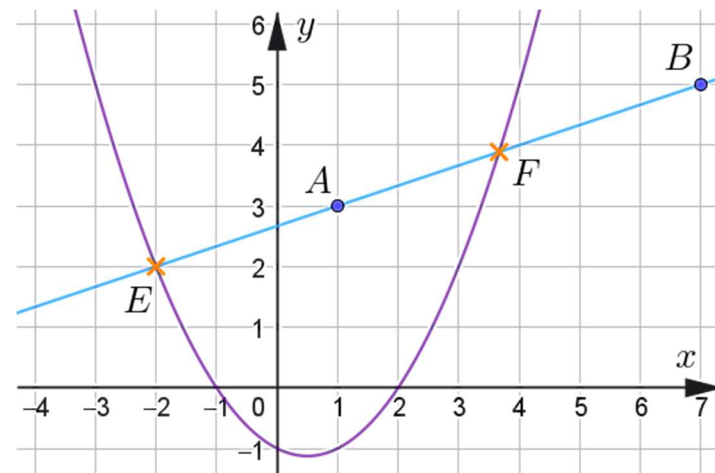


On souhaite que $Q(x)$ soit négatif ou nul, la dernière du tableau de signes
donne alors pour ensemble des solutions : $S =] -\frac{1}{3} ; 1]$.

E10 intersection d'une parabole et d'une droite oblique

On munit le plan d'un repère orthogonal, $\mathcal{P}$ est la parabole représentative
de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x + 1)$.

La droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1; 3)$ et $B(7; 5)$ coupe la parabole $\mathcal{P}$ en E et F
avec $x_E < x_F$. Le point A est-il le milieu de $[EF]$?



Corrigé

La droite (AB) admet pour équation $y = a(x - x_A) + y_A$ avec :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{7 - 1} = \frac{2}{6} = \frac{2 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}(x - 1) + 3 \\ y &= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{9}{3} \\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{-1 + 9}{3} \\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

La droite (AB) admet pour équation réduite $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$.

Pour obtenir les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ on

résout le système :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ y = f(x) \end{cases}$$

autrement dit :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ y = \frac{1}{2}(x-2)(x+1) \end{cases}$$

d'où, par comparaison :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x-2)(x+1) &= \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 + x - 2x - 2) = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^2 - x - 2) - \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{6}x - \frac{2}{6}x - \frac{3}{3} - \frac{8}{3} &= 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{11}{3} = 0 \\ \Leftrightarrow 6 \times \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{11}{3} \right) &= 6 \times 0 \Leftrightarrow \frac{6}{2}x^2 - 6 \times \frac{5}{6}x - 6 \times \frac{11}{3} = 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 22 &= 0 \end{aligned}$$

$3x^2 - 5x - 22$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = -5$ et $c = -22$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-22) = 25 + 264 = 289$$

On constate que $\Delta > 0$ donc l'expression $3x^2 - 5x - 22$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 - \sqrt{289}}{2(3)} = \frac{+5 - 17}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 + \sqrt{289}}{2(3)} = \frac{+5 + 17}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

• si $x = -2$

$$y = \frac{1}{3}(-2) + \frac{8}{3} = \frac{-2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{-2+8}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

• si $x = \frac{11}{3}$

$$y = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{3}\right) + \frac{8}{3} = \frac{1 \times 11}{3 \times 3} + \frac{8 \times 3}{3 \times 3} = \frac{11}{9} + \frac{24}{9} = \frac{11+24}{9} = \frac{35}{9}$$

Comme $x_E < x_F$ on en déduit que : $E(-2 ; 2)$ et $F(\frac{11}{3} ; \frac{35}{9})$.

Le milieu I de $[EF]$ a pour coordonnées :

$$x_I = \frac{x_E + x_F}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_E + y_F}{2}$$

d'où en particulier :

$$x_I = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{-2 + \frac{11}{3}}{2} = \frac{\frac{-6+11}{3}}{2} = \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5 \times 1}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$$

Or $x_A = 1$ donc $x_I \neq x_A$ par conséquent $I \neq A$.

Conclusion : **A n'est pas le milieu de $[EF]$.**

E11 Optimiser la recette d'un théâtre

Un directeur de théâtre dispose d'une salle dans laquelle toutes les places sont proposées au même prix, et il constate d'une part : lorsque le prix de la place est fixé à 20€, alors il peut espérer avoir 130 spectateurs, et d'autre part que toute augmentation de 1€ du prix de la place fait perdre 10 spectateurs, et réciproquement, toute baisse de 1€ du prix de la place ajoute 10 spectateurs supplémentaires ; par conséquent le nombre de spectateurs est une fonction affine du prix de la place. Le prix de la place n'est pas forcément un nombre entier d'euros. Quel doit être le prix de la place pour que la recette soit maximale et que vaut cette recette maximale ?

Corrigé

Pour un prix de la place de x euros, notons $N(x)$ le nombre de spectateurs et $R(x)$ la recette en €.

Avec les indications de l'énoncé, $N(x)$ est une expression affine de x : il existe deux constantes a et b telles que $N(x) = ax + b$. Or on sait que : si $x = 20$ il y a 130 spectateurs, donc $N(20) = 130$, d'où $20a + b = 130$ si $x = 21$ il y aura 10 spectateurs de moins soit 120 spectateurs, donc : $N(21) = 120$, d'où $21a + b = 120$.

On a les équivalences :

$$\begin{cases} 20a + b = 130 \\ 21a + b = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 130 - 20a \\ 21a + 130 - 20a = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 130 - 20a \\ a = -10 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = 130 + 200 \\ a = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 330 \\ a = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 330 \end{cases}$$

On a donc : $N(x) = -10x + 330$.

Le nombre de spectateurs est nécessairement positif ou nul donc :

$$-10x + 330 \geq 0 \Leftrightarrow -10x \geq -330$$

En divisant par -10 , qui est strictement négatif, on obtient :

$$\frac{-10x}{-10} \leq \frac{-330}{-10} \Leftrightarrow x \leq 33$$

Il faut donc que $0 \leq x \leq 33$ (le prix de la place est nécessairement compris entre 0€ et 33€).

On a : recette = prix de la place $\times$ nombre de spectateurs,

donc pour tout $x \in [0; 33]$, on a :

$$R(x) = x \times (-10x + 330) = -10x^2 + 330x$$

$-10x^2 + 330x$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -10$, $b = 330$

et $c = 0$, on a :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-330}{2(-10)} = \frac{33 \times 10}{2 \times 10} = \frac{33}{2} = 16,5$$

$a = -10$, $a < 0$ donc :

$R \nearrow$ sur $[0; \alpha]$ i.e. sur $[0; 16,5]$ et $R \searrow$ sur $[\alpha; 33]$ i.e. sur $[16,5; 33]$.

On a :

$$R(0) = -10(0)^2 + 330(0) = 0$$

$$R(16,5) = -10(16,5)^2 + 330(16,5) = 2\,722,5$$

$$R(33) = 0$$

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0	$\alpha = 16,5$	33
sens de variation de R	0	$\nearrow \beta = 2\,722,5 \searrow$	0

La recette maximale est égale à 2 722, 5 € : elle sera atteinte pour un prix de la place fixé à 16, 5 €.

E12 Utilisation d'une racine évidente

On considère l'équation (E) :

$$f(x) = x^2 + (5\sqrt{3} - \sqrt{17} - 1)x + \sqrt{17} - 5\sqrt{3}$$

Montrer que 1 est une racine de f , en déduire astucieusement l'autre racine.

Corrigé

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + (5\sqrt{3} - \sqrt{17} - 1)x + \sqrt{17} - 5\sqrt{3}$$

• Montrons que 1 est une racine de f .

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 + (5\sqrt{3} - \sqrt{17} - 1) \times 1 + \sqrt{17} - 5\sqrt{3} \\ &= 1 + 5\sqrt{3} - \sqrt{17} - 1 + \sqrt{17} - 5\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

On constate que $f(1) = 0$ donc le nombre 1 est bien une racine de f .

• Déterminons la deuxième racine de f .

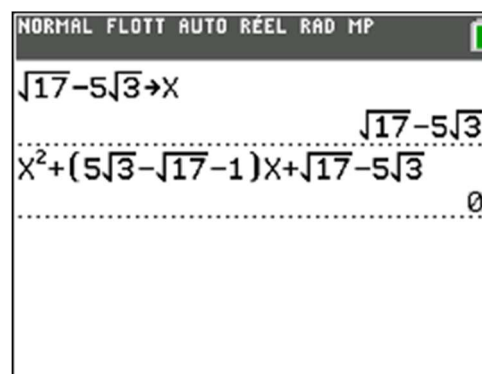
$x^2 + (5\sqrt{3} - \sqrt{17} - 1)x + \sqrt{17} - 5\sqrt{3}$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 5\sqrt{3} - \sqrt{17} - 1$ et $c = \sqrt{17} - 5\sqrt{3}$, or la somme des racines de $ax^2 + bx + c$ est égale à $-\frac{b}{a}$ (cours).

L'une des racines est 1, donc en notant x_2 l'autre racine on a :

$$\begin{aligned} 1 + x_2 &= -\frac{5\sqrt{3} - \sqrt{17} - 1}{1} \Leftrightarrow 1 + x_2 = -5\sqrt{3} + \sqrt{17} + 1 \\ \Leftrightarrow x_2 &= -5\sqrt{3} + \sqrt{17} + 1 - 1 \Leftrightarrow x_2 = -5\sqrt{3} + \sqrt{17} \Leftrightarrow x_2 = \sqrt{17} - 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

L'autre racine est donc : $\sqrt{17} - 5\sqrt{3}$.

Vérification



E13 Équation avec un radical

On souhaite résoudre l'équation (E) : $2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue X : $2X^2 + 3X - 2 = 0$
2. En déduire la(les) solution(s) de (E).

Corrigé

1. $2X^2 + 3X - 2$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = -2$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25.$$

$\Delta > 0$ donc l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 - 5}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

L'équation $2X^2 + 3X - 2 = 0$ admet pour solutions : -2 et $\frac{1}{2}$.

2. (E) : $2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$

La quantité sous le radical (c'est-à-dire sous le symbole de la racine carrée) doit être positive ou nulle donc il faut que $x \geq 0$, par conséquent le domaine d'existence de (E) est : $\mathcal{D} = [0; +\infty[$.

Pour $x \in \mathcal{D}$ l'équation s'écrit aussi : $2(\sqrt{x})^2 + 3\sqrt{x} - 2 = 0$.

En posant $X = \sqrt{x}$ elle devient : $2X^2 + 3X - 2 = 0$, qui donne,

d'après la question précédente : $X = -2$ ou $X = \frac{1}{2}$.

Comme $X = \sqrt{x}$, on obtient : $\sqrt{x} = -2$ ou $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$.

- $\sqrt{x} = -2$ est impossible (le résultat d'une racine carrée est forcément positif ou nul)

- $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ est équivalent à :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ (\sqrt{x})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

L'équation (E) admet pour solution : $\frac{1}{4}$.

vérification

$$2 \times \frac{1}{4} + 3 \sqrt{\frac{1}{4}} - 2 = \frac{1}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} - 2 = \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} - 2 = \frac{4}{2} - 2 = 0$$