

**Exercice 1 [3 points]**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ .

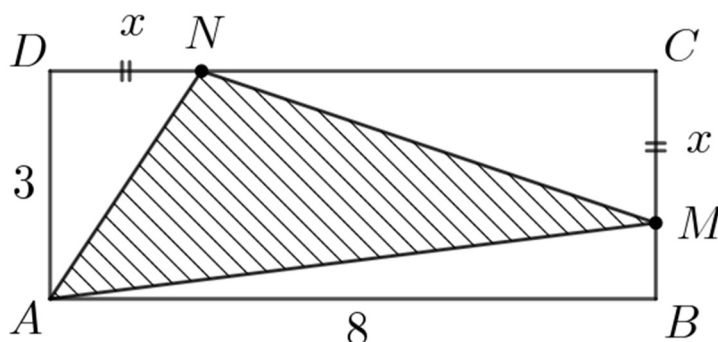
1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $f(x) = 0$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $f(x) > 0$ .

**Exercice 2 [4 points]**

Déterminer deux nombres entiers positifs consécutifs dont la somme des carrés est égale à 313.

**Exercice 3 [7 points]**

Sur la figure ci-dessous,  $ABCD$  est un rectangle tel que :  $AB = 8$  et  $AD = 3$ . Pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; 3]$ , on note  $M$  et  $N$  les points appartenant respectivement à  $[BC]$  et  $[CD]$  tels que  $CM = DN = x$  :



1. Déterminer l'aire du rectangle  $ABCD$ .
2. Sans justification, indiquer ce que vaut l'aire du triangle hachuré  $AMN$  lorsque  $x = 0$ , et ce qu'elle vaut lorsque  $x = 3$ .
3.
  - a. Exprimer en fonction de  $x$  les aires des triangles  $ABM$ ,  $CMN$  et  $ADN$ .
  - b. En déduire que l'aire du triangle hachuré  $AMN$  est :  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 12$ .
4. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 3]$  par :  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 12$ .
  - a. Calculer  $f(0)$  et  $f(3)$ , comparer avec les réponses données à 2.
  - b. Etudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $[0; 3]$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - c. Pour quelle valeur de  $x$  l'aire du triangle hachuré  $AMN$  est-elle minimale et que vaut cette aire minimale ?

**Exercice 4 [4 points]**

1. Vérifier que :  $(3 - \sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2}$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 2(\sqrt{2} - 1) = 0$ .

**Exercice 5 [2 pts]**

Pour tout réel  $m$ , on note  $f_m$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_m(x) = -x^2 + (m + 1)x + m + 1$$

et  $\mathcal{C}_m$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

Déterminer les valeurs de  $m$  pour lesquelles la courbe  $\mathcal{C}_m$  et l'axe des abscisses ont exactement un point en commun, et préciser les coordonnées de ce point.

**BONUS [0,5 point]**

Pour  $a$  et  $b$  réels, on pose :  $E = a^2 + b^2 + a + b + 1$ .

Quel est le minimum de  $E$  et pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  est-il atteint ?

## Corrigé thiaude

### Exercice 1

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

#### 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$ .

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ ou } 2x-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'équation  $f(x) = 0$  admet pour solutions :  $\frac{1}{2}$  et 1.

#### 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) > 0$ .

Règle : «  $ax^2 + bx + c$  est du signe de  $a$  à l'extérieur de ses racines ».

Tableau de signes

| $x$                      | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $+\infty$ |
|--------------------------|-----------|---------------|---|-----------|
| Signe de $2x^2 - 3x + 1$ | +         | 0             | - | +         |

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) > 0$  est :  $] -\infty; \frac{1}{2}[ \cup ]1; +\infty[$ .

### Exercice 2 [4 points]

Deux entiers positifs consécutifs dont la somme des carrés est égale à 313.

Ne pas oublier de commencer par définir précisément l'inconnue et de conclure à la fin.

Soit  $x$  le plus petit des deux entiers consécutifs positifs, l'autre est  $x + 1$  et l'information sur la somme des carrés s'écrit :  $x^2 + (x + 1)^2 = 313$ .

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x^2 + (x + 1)^2 = 313 &\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 313 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 312 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x^2 + x - 156) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 156 = 0 \end{aligned}$$

$x^2 + x - 156$  est de la forme  $ax^2 + bx + c$  avec  $a = 1$ ,  $b = 1$  et  $c = -156$ ,  
de discriminant :  $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(-156) = 1 + 624 = 625 = 25^2$ .

On constate que  $\Delta > 0$  donc  $x^2 + x - 156$  admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{625}}{2(1)} = \frac{-1 - 25}{2} = \frac{-26}{2} = -13 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{625}}{2} = \frac{-1 + 25}{2} = \frac{24}{2} = 12 \end{aligned}$$

Or,  $-13$  n'est pas un entier positif donc est refusé, et 12 est bien un entier positif donc est accepté.

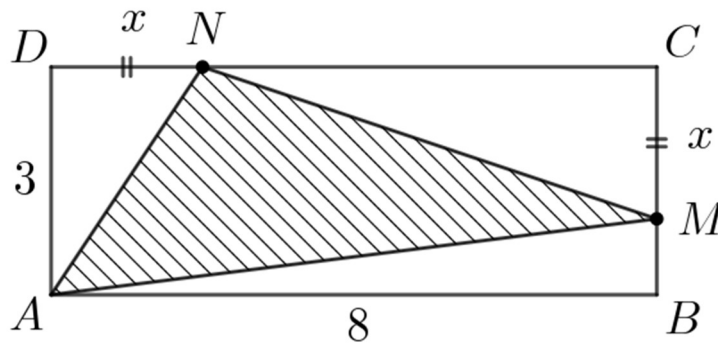
Les deux entiers naturels consécutifs cherchés sont : **12 et 13**.

Vérification :  $12^2 + 13^2 = 144 + 169 = 313$ .

### Exercice 3

$ABCD$  rectangle,  $AB = 8$  et  $AD = 3$ .

$x \in [0; 3]$ ,  $CM = DN = x$  :



1. Déterminer l'aire du rectangle  $ABCD$ .

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 8 \times 3 = 24$$

2. Sans justification, indiquer ce que vaut l'aire du triangle hachuré  $AMN$  lorsque  $x = 0$ , et ce qu'elle vaut lorsque  $x = 3$ .

$$\text{Si } x = 0, N = D \text{ et } M = C, \mathcal{A}_{AMN} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 24 = 12.$$

$$\text{si } x = 3, M = B, \mathcal{A}_{AMN} = \frac{1}{2} AB \times AD = 12$$

3. a. Exprimer en fonction de  $x$  les aires des triangles  $ABM$ ,  $CMN$  et  $ADN$ .

Le triangle  $ABM$  est rectangle en  $B$ , or l'aire d'un triangle rectangle est :

$$\frac{1}{2} \times \text{produit des côtés de l'angle droit}$$

donc :

$$\mathcal{A}_{ABM} = \frac{1}{2} \times AB \times BM = \frac{1}{2} \times 8(3 - x) = 4(3 - x) = 12 - 4x.$$

$$\mathcal{A}_{ABM} = 12 - 4x.$$

De même, on obtient :

$$\mathcal{A}_{CMN} = \frac{1}{2} \times CM \times CN = \frac{1}{2} x(8 - x) \text{ et } \mathcal{A}_{ADN} = \frac{1}{2} \times DA \times DN = \frac{1}{2} \times 3 \times x = \frac{3x}{2}$$

$$\mathcal{A}_{CMN} = \frac{1}{2} x(8 - x) \text{ et } \mathcal{A}_{ADN} = \frac{3x}{2}$$

- b. En déduire que l'aire du triangle  $AMN$  hachuré est :  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 12$ .

$$\text{On a : } \mathcal{A}_{AMN} = \mathcal{A}_{ABCD} - (\mathcal{A}_{ABM} + \mathcal{A}_{CMN} + \mathcal{A}_{ADN})$$

donc en utilisant la question 3.a. :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{AMN} &= 24 - \frac{8(3 - x) + x(8 - x) + 3x}{2} = 24 - \frac{-x^2 + 3x + 24}{2} \\ &= \frac{48 - (-x^2 + 3x + 24)}{2} = \frac{48 + x^2 - 3x - 24}{2} = \frac{x^2 - 3x + 24}{2} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 12 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_{AMN} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 12$$

4. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 3]$  par :  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 12$ .

a. Calculer  $f(0)$  et  $f(3)$ , comparer avec les réponses données à la question 2.

$$f(0) = \dots = 12 \text{ et } f(3) = \frac{1}{2} \times 9 - \frac{3}{2} \times 3 + 12 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 12 = 12$$

On retrouve bien les réponses données à la question 2.

b. Etudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $[0; 3]$ .

On a :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{3}{2}}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = +\frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

$$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right) + 12 = \frac{1}{2} \times \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 12 = \frac{9}{8} - \frac{18}{8} + \frac{96}{8} = \frac{87}{8}$$

On a :  $a = \frac{1}{2}$ ,  $a > 0$  donc :

- $f$  est décroissante sur  $[0; \alpha]$ , c'est-à-dire sur  $[0; \frac{3}{2}]$

- $f$  est croissante sur  $[\alpha; 3]$ , c'est-à-dire sur  $[\frac{3}{2}; 3]$

On obtient finalement le tableau de variation :

| $x$                      | 0  | $\alpha = \frac{3}{2}$ | 3  |
|--------------------------|----|------------------------|----|
| Sens de variation de $f$ | 12 | $\beta = \frac{87}{8}$ | 12 |

c. Pour quelle valeur de  $x$  l'aire du triangle  $AMN$  est-elle minimale et que vaut cette aire minimale ?

D'après 4.b.  $f$  admet pour minimum absolu sur  $[0; 3]$  le nombre  $\frac{87}{8}$  et il atteint pour

$x = \frac{3}{2}$  (uniquement), donc l'aire minimale du triangle  $AMN$  est atteinte pour  $x = \frac{3}{2}$

(uniquement), et elle vaut :  $\frac{87}{8}$ .

#### Exercice 4

1. Vérifier que :  $(3 - \sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2}$ .

Développons le membre de gauche de l'égalité proposée :

$$(3 - \sqrt{2})^2 = 3^2 - 2(3)(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$$

On a donc bien :  $(3 - \sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2}$ .

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 2(\sqrt{2} - 1) = 0$ .

$x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 2(\sqrt{2} - 1)$  est de la forme  $ax^2 + bx + c$  avec  $a = 1$ ,  $b = 1 + \sqrt{2}$  et  $c = 2(\sqrt{2} - 1)$ , de discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (1 + \sqrt{2})^2 - 4(1)2(\sqrt{2} - 1) = 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 8\sqrt{2} + 8 \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 8\sqrt{2} + 8 = 11 - 6\sqrt{2} = (3 - \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

On constate que  $\Delta > 0$  donc  $x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 2(\sqrt{2} - 1)$  admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2}}{2(1)} = \frac{-1 - \sqrt{2} - |3 - \sqrt{2}|}{2} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{2} - (3 - \sqrt{2})}{2} = \frac{-1 - \sqrt{2} - 3 + \sqrt{2}}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(1 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2})}{2(1)} = \frac{-1 - \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

### Conclusion

L'équation  $x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 2(\sqrt{2} - 1) = 0$  admet pour solutions  $-2$  et  $1 - \sqrt{2}$ .

On peut vérifier le produit des racines :

$$\begin{aligned} (-2)(1 - \sqrt{2}) &= -2 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) \\ \frac{c}{a} &= \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{1} = 2(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

### Exercice 5

$m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f_m(x) = -x^2 + (m + 1)x + m + 1$ ,  $\mathcal{C}_m$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal, pour quelle(s) valeur(s) de  $m$  la courbe  $\mathcal{C}_m$  et l'axe des abscisses du repère ont exactement un point en commun, en préciser les coordonnées.

$-x^2 + (m + 1)x + m + 1$  est de la forme  $ax^2 + bx + c$  avec  $a = -1$ ,  $b = m + 1$  et  $c = m + 1$ , de discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta_m &= b^2 - 4ac = (m + 1)^2 - 4(-1)(m + 1) = (m + 1)^2 + 4(m + 1) \\ \Delta_m &= (m + 1)(m + 1 + 4) = (m + 1)(m + 5) \end{aligned}$$

Dire que  $\mathcal{C}_m$  a exactement un point en commun avec l'axe des abscisses revient à dire que  $\Delta_m = 0$ , autrement dit :  $(m + 1)(m + 5) = 0$ , c'est-à-dire  $m = -1$  ou  $m = -5$ , l'unique solution de  $f_m(x)$  est alors :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(m + 1)}{2(-1)} = \frac{m + 1}{2}$$

- si  $m = -1$ , alors l'unique solution est :  $\frac{-1+1}{2} = 0$  et le point commun entre  $\mathcal{C}_{-1}$  et l'axe des abscisses est l'origine du repère,
- si  $m = -5$ , alors l'unique solution est :  $\frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$  et le point commun entre  $\mathcal{C}_{-5}$  et l'axe des abscisses a pour coordonnées  $(-2; 0)$ .

### Conclusion

$$m \in \{-5; -1\}$$

- si  $m = -5$ ,  
alors le point commun entre  $\mathcal{C}_m$  et l'axe des abscisses a pour coordonnées  $(-2; 0)$ ,
- si  $m = -1$ ,  
alors le point commun entre  $\mathcal{C}_m$  et l'axe des abscisses est l'origine du repère.

## **BONUS**

Pour  $a$  et  $b$  réels, on pose :  $E = a^2 + b^2 + a + b + 1$ . Quel est le minimum de  $E$  et pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  est-il atteint ?

Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a :

$$\begin{aligned} E &= a^2 + b^2 + a + b + 1 = a^2 + a + b^2 + b + 1 \\ &= (a)^2 + 2(a)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (b)^2 + 2(b)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\ &= \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Résumons :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, E = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a :

$$E - \frac{1}{2} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

donc :  $E - \frac{1}{2} \geq 0$ , autrement dit :  $E \geq \frac{1}{2}$ .

Résumons :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, E \geq \frac{1}{2} \quad (*)$$

D'autre part, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow E - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a + \frac{1}{2} = b + \frac{1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Résumons :

$$E = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = -\frac{1}{2} \quad (**)$$

Il résulte de (\*) et (\*\*) que :

**$E$  admet pour minimum absolu  $\frac{1}{2}$ , il est atteint pour  $a = b = -\frac{1}{2}$  (uniquement).**