

ACTIVITÉS 05. Fonction exponentielle

L'indication [NPA] signifie *ne pas apprendre* : la propriété ne présente un intérêt que pour la progression adoptée dans ce cours.

1. Propriétés caractéristiques et conséquences

Propriété P1 admise [NPA]

Si f et u sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $f \circ u : x \mapsto f(u(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $x \mapsto f'(u(x)) \times u'(x)$: $(f \circ u)' = (f' \circ u) \times u'$. On pourra retenir : $(f(u))' = f'(u) \times u'$.

Propriété P2 admise [NPA]

Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et à **dérivée nulle** sur $\mathbb{R}$, alors f est une **fonction constante** sur $\mathbb{R}$: il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$.

Propriété P3 d'existence admis [NPA]

Il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa fonction dérivée et qui prend la valeur 1 en 0 : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Formules [NPA] [1.1]

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa fonction dérivée et qui prend la valeur 1 en 0. Alors : $\bullet f(x) \times f(-x) = 1$ $\bullet f(x) \neq 0$ $\bullet f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

Propriété d'unicité [1.2]

Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa fonction dérivée et qui prend la valeur 1 en 0.

2. Notation exp

Définition

L'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa fonction dérivée et qui prend la valeur 1 en 0, s'appelle la **fonction exponentielle**, et elle se note exp, donc : $\exp(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$.

Propriété [NPA] [2.1]

Pour tout $x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Formules [NPA] [2.2]

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$ et $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Formules [NPA] [2.3]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{R}$:

- $\bullet \exp(2x) = (\exp(x))^2$ $\bullet \exp(3x) = (\exp(x))^3$
- $\bullet \exp(nx) = (\exp(x))^n$ $\bullet \exp\left(\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{\exp(x)}$

Définition

Le **nombre d'Euler** e est l'image de 1 par la fonction exponentielle : $e \stackrel{\text{def}}{=} \exp(1)$ et $e \approx 2,718$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, \exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n = e^n$.

En posant, pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x = \exp(x)$, les formules précédentes montrent que e^x obéit aux règles de calculs sur les exposants.

3. Etude de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$

Formule [3.1]

Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

- $\blacktriangleright (e^x)' = e^x$ $\blacktriangleright e^x > 0$
- $\blacktriangleright (e^x)^2 = e^{2x}$ $\blacktriangleright (e^x)^n = e^{nx}$ $\blacktriangleright e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $\blacktriangleright e^x \times e^y = e^{x+y}$ $\blacktriangleright \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ $\blacktriangleright \sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$
- $\blacktriangleright e^0 = 1$ $\blacktriangleright e^1 = e \approx 2,718$ $\blacktriangleright \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

Formules de dérivation [3.2]

Si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée : $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ (conséquence de P1).

Si a et b sont deux constantes réelles, alors la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de fonction dérivée $x \mapsto a e^{ax+b}$.

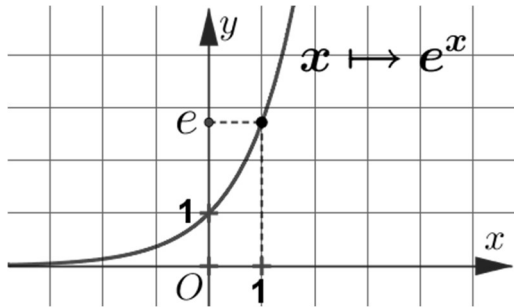
On pourra retenir :

- $\blacktriangleright (e^u)' = u'e^u$ $\blacktriangleright (e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$ $\blacktriangleright (e^{-x})' = -e^{-x}$

Sens de variation [3.3]

► La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Courbe représentative



Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction exponentielle est située strictement au-dessus de l'axe des abscisses.

Propriété [3.4]

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

► $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

Propriété de compatibilité avec les relations d'ordre [3.5]

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

► $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

► $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

► $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$

► $e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b$

Propriété [3.6]

Soit $a \in \mathbb{R}$ une constante et (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{an}$.

Alors la suite (u_n) est **géométrique**, de raison e^a .

Démonstrations de cours

D01 Démonstration de NPA [1.1] [1.2]

Soit f une fonction vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Objectif

Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = f(x) \times f(-x)$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} : (f(-x))' = -f'(-x)$.

2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R} : p'(x) = 0$.

3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) \times f(-x) = 1$.

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

4. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et prenant la valeur 1 en 0,

et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} : h'(x) = 0$, puis, pour tout $x \in \mathbb{R} : g(x) = f(x)$. Existe-t-il plusieurs fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, égales à leur fonction dérivée et prenant la valeur 1 en 0 ?

D02 Démonstration de [2.2]

Objectif Démontrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y) \text{ et } \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

Soit b une constante, g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{\exp(x+b)}{\exp(x)}$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} : g'(x) = 0$.

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R} : \exp(x + b) = \exp(x) \times \exp(b)$.

Écrire l'égalité précédente en remplaçant b par $y \in \mathbb{R}$, conclure.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

En calculant de deux manières différentes $\exp(x - y) \times \exp(y)$,

montrer que : $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

D03 Démonstration de [NPA] [2.3]

Soit $x \in \mathbb{R}$. En remarquant que $2x = x + x$, $3x = 2x + x$ et enfin que

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = x$, démontrer que :

$\exp(2x) = (\exp(x))^2$, $\exp(3x) = (\exp(x))^3$ et $\exp\left(\frac{1}{2}x\right) = \sqrt{\exp(x)}$.

D04 Démonstration de [3.3]

Objectif

Justifier que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$. Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, en déduire les variations de f .

D05 Démonstration du premier point de [3.4]

Objectif Démontrer que l'on a l'équivalence : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

Soient a et b deux réels tels que $e^a = e^b$.

Trois cas seulement peuvent se présenter : $a < b$, $a = b$, $a > b$.

1. On suppose que $a < b$.
En utilisant le sens de variation de la fonction exponentielle, aboutir à une contradiction.
Conclusion : il est impossible que $a < b$.
2. On suppose que $a > b$. En utilisant le sens de variation de la fonction exponentielle, obtenir une contradiction.
Conclusion : il est impossible que $a > b$.
3. Conclure.

On a démontré l'implication : $e^a = e^b \Rightarrow a = b$. L'implication réciproque est triviale.

D06 Démonstration de [3.6]

Soit $a \in \mathbb{R}$ une constante et (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{an}$.

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique, de raison e^a .

Activités élémentaires

A01 Simplifier :

$$A = e^2 \times e^{-1} \quad B = \left(e^{\frac{1}{3}}\right)^3 \times e^{-1} \quad C = \sqrt{e} \times e^{\frac{3}{2}} \quad D = \frac{e^{-3} \times e}{e^{-7}}$$

$$\underline{\text{rép}} : A = e, B = 1, C = e^2, D = e^5$$

A02 Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifier :

$$E = \sqrt{e^{2x}} \quad F = e^{x-1} \times e^x \quad G = \frac{e^{4x-1}}{e^{x-3}} \quad H = \frac{e^{2x-3} \times e^{-3x+4}}{e^{-x+1}}$$

$$\underline{\text{rép}} : E = e^x, F = e^{2x-1}, G = e^{3x+2}, H = 1$$

A03 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x+1}$, $g(x) = e^{0,5x}$ et $h(x) = e^{-2x+5}$.
Calculer $f'(x)$, $g'(x)$ et $h'(x)$.

Activités plus intéressantes

A04 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle.
3. Étudier le signe de $f'(x)$, en déduire le tableau de variation de f .

A05 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2e^x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$, en déduire le tableau de variation de f .

A06 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2e^{-x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$, en déduire le tableau de variation de f .

A07 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :

$$1. e^{x+3} = 1 \quad 2. e^x \times e^{4x+1} = e \quad 3. e^{-x} = -3 \quad 4. e^{2x} + 1 = 2e^x$$

$$\underline{\text{rép}} : 1. \{-3\} \quad 2. \{0\} \quad 3. \emptyset \quad 4. \{0\}$$

A08 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x(e^x + 4) = 5$.

$$\underline{\text{rép}} : \{0\}$$

A09 Résoudre dans $\mathbb{R}$: 1. $e^x - 2xe^x = 0$ 2. $xe^x - e^{x+1} = 0$

$$\underline{\text{rép}} : 1. \left\{\frac{1}{2}\right\} \quad 2. \{e\}$$

A10 Résoudre : 1. $e^{-x+2} < e^x$ 2. $e^{x-3} \geq 1$
rép : 1. $]1; +\infty[$ 2. $[3; +\infty[$

A11 Dresser le tableau de signes de chacune des expressions suivantes définies sur $\mathbb{R}$: $A(x) = e^{-x} + 5$ $B(x) = -e^x - 2$ $C(x) = e^{3x} - e^{x-1}$
rép : $A(x)$ est toujours strict. positif ; $B(x)$ est toujours strict. négatif ;
 $C(x) = 0$, $x = -\frac{1}{2}$

A12 Dresser le tableau de signes de $D(x) = e^{-2x} - 2e^{-x} + 1$.
rép : $D(x)$ est $+ 0 +$, $x = 0$

A13 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x + ax + 1$, où a est une constante réelle provisoirement inconnue. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
 Déterminer a sachant que la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle admet pour coefficient directeur 4. rép : $a = 3$

A14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

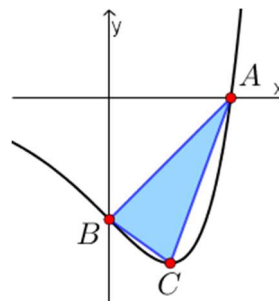
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

1. Démontrer que f est une fonction impaire.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Calculer $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

A15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$, $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et T .

A16 Pour tout réel x on pose : $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = e^{3x}$.
 Étudier les positions relatives de leurs courbes représentatives dans un même repère orthogonal du plan.

A17C Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 2)e^x$.



On donne ci-contre l'allure de la représentation graphique Γ de f dans un repère **orthonormé** du plan.

On précise que :

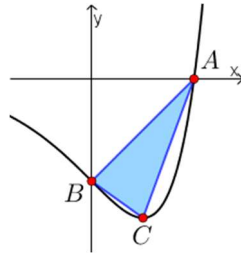
- les points A , B et C appartiennent à Γ
- l'ordonnée de A est nulle
- l'abscisse de B est nulle
- en C la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer les coordonnées de A , B et C .
2. Calculer AB et AC .
3. [sans calculatrice] On admet que $\sqrt{7} \approx 2,65$, arrondie au centième.
En raisonnant par l'absurde, démontrer que le triangle ABC n'est pas isocèle en A .

A17C

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x - 2)e^x$$

- les points A , B et C appartiennent à Γ
- l'ordonnée de A est nulle
- l'abscisse de B est nulle
- en C la tangente est parallèle à l'axe des abscisses

**1. Déterminer les coordonnées de A , B et C .****• Coordonnées de A**

$A \in \Gamma \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$. Or, A appartient à l'axe des abscisses, donc son ordonnée est nulle : $y_A = 0$; on a donc $0 = f(x_A)$ par conséquent x_A est solution de l'équation $f(x) = 0$, qui s'écrit :

$$(x - 2) \times e^x = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ ou } e^x = 0$$

Or, pour tout réel x , on a $e^x \neq 0$, donc $x - 2 = 0$, puis $x = 2$.

Finalement : **$A(2 ; 0)$** .

• Coordonnées de B

$B \in \Gamma \Leftrightarrow y_B = f(x_B)$. Or, B appartient à l'axe des ordonnées, donc son abscisse est nulle : $x_B = 0$, on a donc

$$y_B = f(0) = (0 - 2) \times e^0 = -2 \times 1 = -2$$

Finalement : **$B(0 ; -2)$** .

• Coordonnées de C

En C il y a une tangente parallèle à l'axe des abscisses donc x_C est solution de l'équation $f'(x) = 0$; on a : $f(x) = (x - 2) \times e^x$ et $(e^x)' = e^x$, par application de formule de la dérivée d'un produit on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - 2)' \times e^x + (e^x)' \times (x - 2) = 1 \times e^x + e^x \times (x - 2) \\ &= e^x[1 + (x - 2)] = (x - 1)e^x \end{aligned}$$

Résumons : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x - 1)e^x$.

L'équation $f'(x) = 0$ s'écrit donc : $(x - 1)e^x = 0$ qui est équivalent à $x - 1 = 0$ ou $e^x = 0$; or, pour tout réel x on a $e^x \neq 0$, donc $x - 1 = 0$, soit finalement $x = 1$: on a donc $x_C = 1$.

Or, $C \in \Gamma$ donc $y_C = f(x_C) = f(1) = (1 - 2) \times e^1 = -e$.

Finalement : **$C(1 ; -e)$** .

2. Rappelons que : $A(2 ; 0)$, $B(0 ; -2)$, $C(1 ; -e)$.

Le repère est orthonormé donc on peut appliquer la formule de la distance :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{4 + 4} \\ &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-e - 0)^2} \\ &= \sqrt{1 + e^2} \end{aligned}$$

Résumons : $AB = \sqrt{8}$ et $AC = \sqrt{1 + e^2}$.

3. On admet que $\sqrt{7} \approx 2,65$ arrondi au centième.

Raisonnons par l'absurde en supposant que le triangle ABC est isocèle en A , alors $AB = AC$ qui s'écrit aussi : $\sqrt{8} = \sqrt{1 + e^2}$,

d'où : $(\sqrt{8})^2 = (\sqrt{1 + e^2})^2$, c'est-à-dire : $e^2 + 1 = 8$ qui équivaut à $e^2 = 7$, d'où $e = \sqrt{7}$, $e \approx 2,72$ et $\sqrt{7} \approx 2,65$ arrondis au centième, et comme ils sont différents il y a contradiction, par conséquent on doit rejeter l'hypothèse selon laquelle le triangle ABC est isocèle en A .

Finalement : le triangle **ABC n'est pas isocèle en A** .