

ACTIVITÉS 04. Suite numérique

1. Notion de suite numérique

Définition

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels, aussi appelé ensemble des entiers positifs ou nuls, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$.

Une **suite numérique** est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$), à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour une suite, la variable est un entier naturel n .

⚡ Ne pas confondre l'entier n , le réel u_n et la suite (u_n) .

Définition

Une suite peut être définie **par une formule explicite**, c'est-à-dire par une écriture $u_n = f(n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$), ou bien elle peut être définie par son premier terme et une **relation de récurrence** qui permet, de proche en proche, de calculer les termes, elle est alors donnée **par récurrence**.

exemple d'une suite donnée de manière explicite

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{2n+3}$.

Pour $n = 10$, on obtient directement : $u_{10} = \sqrt{2(10)+3} = \sqrt{23}$,

on dit que u_{10} est le **terme de rang** 10 et qu'il a pour **valeur** $\sqrt{23}$.

Le **terme initial** est $u_1 = \sqrt{2(1)+3} = \sqrt{5}$.

exemple d'une suite donnée par récurrence

On pose : $u_0 = 0,25$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$, alors :

- pour $n = 0$, on obtient : $u_1 = 2u_0 + 1 = 2(0,25) + 1 = 1,5$
- pour $n = 1$, on obtient : $u_2 = 2u_1 + 1 = 2(1,5) + 1 = 4$, etc.

On peut calculer de proche en proche les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Suite arithmétique

Définition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et r une constante réelle. Alors :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **arithmétique** de raison $r \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$

En situation concrète

► Lorsque l'on effectue régulièrement dans le temps des relevés et que l'on note u_n la valeur du n -ième relevé, alors dire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est **arithmétique** revient à dire que les **évolutions successives** se font à **accroissements constants**.

Formule [2.1]

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **arithmétique** de raison r , alors pour n et p dans $\mathbb{N}$:

$$\text{► } u_n = u_p + (n - p)r \quad \text{► } u_n = u_0 + nr \quad \text{► } u_n = u_1 + (n - 1)r$$

Ces formules permettent d'obtenir la forme explicite de u_n .

[i] la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique $\Leftrightarrow$ il existe une fonction **affine** f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Nombre de termes dans une somme

► Dans la somme $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$, il y a $(n - p + 1)$ termes ajoutés : « nombre de termes ajoutés = différence des indices + 1 »

[i] notation sigma :
$$\sum_{i=p}^n u_i = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$$

Formule de la somme des premiers termes [2.2]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **arithmétique** de raison r . Alors :

$$\text{► } \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + \dots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$
$$\text{► } \sum_{i=1}^n u_i = u_1 + \dots + u_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$$

[i] On reconnaît :

$$\frac{(\text{premier} + \text{dernier terme de la somme}) \times \text{nombre de termes ajoutés}}{2}$$

$$\text{En particulier : } \text{► } 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

3. Suite géométrique

Définition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et q une constante réelle. Alors :

(u_n) est **géométrique** de raison $q \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q$

En situation concrète

► Lorsque l'on effectue régulièrement dans le temps des relevés et que l'on note u_n la valeur du n -ième relevé, alors dire que la suite (u_n) est **géométrique** revient à dire que les **évolutions successives** se font à **taux constant**.

Lien entre le taux t et la raison q [3.1]

Des variations successives de $t\%$ constants correspondent à une suite géométrique de raison ► $q = 1 + \frac{t}{100}$, t étant compté positivement lorsque la variation est une hausse, et négativement si la variation est une baisse.

Formule [3.2]

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **géométrique** de raison $q \neq 0$, alors pour n et p dans $\mathbb{N}$:

$$\text{► } u_n = u_p \times q^{n-p} \quad \text{► } u_n = u_0 \times q^n \quad \text{► } u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Ces formules donnent la forme explicite de u_n .

Formule de la somme des premiers termes [3.3]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **géométrique** de raison $q \neq 1$. Alors :

$$\text{► } \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\text{► } \sum_{i=1}^n u_i = u_1 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

[i] on reconnaît :

$$\text{premier terme de la somme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes ajoutés}}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

$$\text{En particulier : } \text{► } 1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

[i] Si $q = 1$, tous les termes de la suite géométrique sont égaux au premier et la somme se calcule directement, sans formule.

🔥 La plupart des suites ne sont ni arithmétiques, ni géométriques.

4. Sens de variation

Définition

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leq u_{n+1}$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante à partir du rang n_0** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, on a : $u_n \leq u_{n+1}$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq u_{n+1}$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante à partir du rang n_0** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, on a : $u_n \geq u_{n+1}$

🔥 Pour une suite arithmétique, les évolutions successives se font à « accroissements constants » : cela ne signifie pas que la suite est croissante, un tel « accroissement » pouvant être négatif.

Propriété : signe de la différence [4.1]

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n \geq 0$
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** $\Leftrightarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

[i] Si on constate qu'à un moment la différence $u_{n+1} - u_n$ change de signe, alors la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

Propriété [4.2]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite donnée explicitement, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$:

- si f est **croissante** sur $[0 ; +\infty[$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante**
- si f est **décroissante** sur $[0 ; +\infty[$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante**

🔥 attention : ce sont des implications, les réciproques sont fausses

Démonstrations de cours

D01 À l'aide d'un schéma, « justifier » brièvement [2.1]

D02 Preuve de la première formule de la somme [2.2]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **arithmétique** de raison r .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = u_0 + \dots + u_n$$

Objectif : Montrer que

$$S_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

Ecrire deux fois S_n , l'une en dessous de l'autre.

Justifier que, pour n'importe laquelle des colonnes, la somme de deux termes est égale à $u_0 + u_n$. En déduire que $2S_n = (u_0 + u_n)(n+1)$, conclure.

On démontrerait de manière analogue la formule donnant la somme des termes de u_1 à u_n .

D03 Justification de la formule $q = 1 + \frac{t}{100}$ [3.1]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que l'on passe d'un terme au suivant par une variation de $t\%$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{t}{100} \times u_n$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1 + \frac{t}{100}) \times u_n$, conclure.

D04 À l'aide d'un schéma, « justifier » brièvement [3.2]

D05 Justification de la formule $u_0 + \dots + u_n$ pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $q \neq 1$ [3.3]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme des termes consécutifs de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de u_0 à u_n .

1. Simplifier $S_n - qS_n$.

2. En déduire que :

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

D06 Justifier de l'utilité du signe de $u_{n+1} - u_n$ [4.1]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

1. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

D07 $u_n = f(n)$ avec f monotone sur $[0; +\infty[$ [4.2]

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite donnée explicitement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

1. On suppose que f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2. On suppose que f est décroissante sur $[0; +\infty[$.

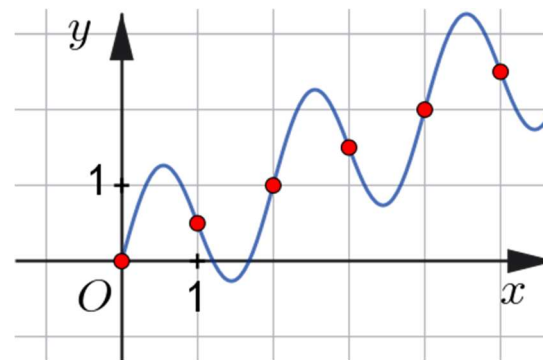
Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

🚫 Attention : les réciproques sont fausses.

Contre-exemple :

Pour $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = 0,5x + \sin(\pi x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. On peut montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, mais que la fonction f n'est pas croissante sur $[0; +\infty[$.

En bleu la courbe représentative de f , en rouge les points représentant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



Activités élémentaires

A01 (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 0,5$.

1. Calculer u_1, u_2 . En déduire : $S_2 = u_0 + u_1 + u_2$.
2. Exprimer u_n en fonction de $n, n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer l'entier naturel p tel que : $u_p = 100$.
4. Calculer $S = 3 + 3,5 + 4 + 4,5 + \dots + 100$.

rép : 1. $S_2 = 10,5$ 2. $u_n = 0,5n + 3$ 3. $p = 194$ 4. $S = 10\,042,5$

A02 Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 3n + 5$.

1. Calculer le premier terme u_0 .
2. Montrer que la suite (u_n) est arithmétique et préciser sa raison.

rép : 1. 5 2. $r = 3$

A03 (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 . En déduire : $S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3$.
2. Exprimer u_n en fonction de $n, n \in \mathbb{N}$.

rép : 1. $S_3 = 45$ 2. $u_n = 3 \times 2^n$

A04 Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 7 \times 3^n$.

1. Calculer le premier terme u_0 .
2. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

rép : 1. $u_0 = 7$ 2. $q = 3$

A05 Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 3$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 .
En déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On se propose d'étudier le sens de variation de la suite (u_n) de deux façons différentes.

Méthode n°1

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2n + 1$.

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Méthode n°2

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 3$.

Déterminer le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$, en déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

rép : 1. $u_0 = 3, u_1 = 4, u_2 = 7$ 2-1. $(u_n) \nearrow$ 2-2. $f \nearrow$ donc $(u_n) \nearrow$

A06 Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n+2} + 5$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 .

En déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. On se propose d'étudier le sens de variation de la suite (u_n) de deux façons différentes.

Méthode n°1

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(n+2)(n+3)}$.

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Méthode n°2 :

Soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+2} + 5$.

Déterminer le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$, en déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Activités plus intéressantes

A07 On pose $u_0 = 100$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 0,8 u_n + 40$.
Pour entrer la suite sur la calculatrice, se placer d'abord en mode Suite :

1. Écrire un programme Python qui demande n puis affiche u_n .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 200$.
 - a. Démontrer que (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
 - b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
3. Démontrer que (u_n) est strictement croissante et majorée par 200.



Entrer ensuite :



NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP	
CONDITION INITIALE	
Graph1	Graph2
TYPE: SUITE(n)	SUITE(n+1)
nMin=0	
$u(n+1) = 0.8u(n) + 40$	
$u(0) = 100$	
$u(1) =$	
$v(n+1) = u(n+1) - 200$	
$v(0) =$	
$v(1) =$	
$w(n+1) =$	

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP	
APP SUR + POUR ΔTb1	
n	u
0	100
1	120
2	136
3	148.8
4	159.04
5	167.23
6	173.79
7	179.03
8	183.22
9	186.58
10	189.26

rép :

1. Programme Python

```
n = int(input("n = "))
```

```
u = 100
```

```
for k in range(n): #ou range(0,n) ou range(1,n+1)
```

```
    u = 0.8*u + 40
```

```
print(u)
```

2a. $v_0 = -100$, $q = 0,8$ 2b. $v_n = -100 \times 0,8^n$, $u_n = 200 - 100 \times 0,8^n$

3. $u_{n+1} - u_n = 20 \times 0,8^n > 0$, (u_n) strictement croissante

$u_n = 200 - 100 \times 0,8^n < 200$

A08 La tour de Hanoï

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. Entrer la suite (u_n) dans la calculatrice.
2. Écrire un programme Python qui demande d'entrer un entier naturel non nul n , puis affiche la somme des termes consécutifs de u_1 à u_n .
3. Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $v_n = u_n + 1$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
 - b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n , en déduire la valeur exacte de u_{76} , puis, en utilisant la calculatrice, une écriture scientifique approchée.

4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$S_n = u_1 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad S'_n = v_1 + \dots + v_n$$

- a. Donner la forme explicite de S'_n .
- b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 2^{n+1} - n - 2$.

rép :

2. Programme Python

```
n = int(input("n = "))
```

```
u = 1
```

```
s = 0
```

```
for k in range(1,n+1):
```

```
    s = s + u
```

```
    u = 2*u + 1
```

```
print(s)
```

3a. $v_1 = 2$, $q = 2$ 3b. $v_n = 2^n$, $u_n = 2^n - 1$, $u_{76} \approx 7,56 \times 10^{22}$

4a. $S'_n = 2^{n+1} - 2$

4b. $S_n = v_1 - 1 + \dots + v_n - 1 = v_1 + \dots + v_n - n = S'_n - n = 2^{n+1} - 2 - n$

A09 $u_0 = 80$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,75u_n + 40$.

1. Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n - 160$.
 - a. Montrer que (v_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
 - b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) et justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n < 160$.
3. Écrire en Python un programme qui détermine le plus petit entier naturel non nul p pour lequel : $|u_p - 160| < 0,01$.
Faire tourner ce programme puis vérifier que $p = 32$.

rép :

1a. $v_0 = -80$, $q = 0,75$ **1b.** $v_n = -80 \times 0,75^n$, $u_n = 160 - 80 \times 0,75^n$

2. $u_{n+1} - u_n = 20 \times 0,75^n$, (u_n) est strictement croissante

$$u_n = 160 - 80 \times 0,75^n < 160$$

3. Programme Python

```
u = 80
```

```
p = 0
```

```
while abs(u - 160) >= 0.01:
```

```
    u = 0.75*u + 40
```

```
    p = p + 1
```

```
print(p)
```