

ACTIVITÉS 03. Dérivation

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans ce repère.

1. Nombre dérivé

Rappel sur les droites

- une **droite horizontale** est parallèle à l'axe des abscisses, une **droite verticale** est parallèle à l'axe des ordonnées
- toute droite non verticale admet une équation $y = mx + p$ appelée **équation réduite** de cette droite et il y a unicité de cette écriture, le nombre m est le **coefficient directeur** de la droite et le nombre p est l'**ordonnée à l'origine** de la droite
- l'ordonnée à l'origine indique en quelle valeur la droite coupe l'axe des ordonnées du repère
- si la **droite « monte »**, le **coefficient directeur est positif**, ou bien si la **droite « descend »**, le **coefficient directeur est négatif** ou bien si la **droite est horizontale**, le coefficient directeur est nul
- le coefficient directeur d'une droite se note souvent a , m ou encore $a_{(AB)}$ lorsqu'il s'agit de la droite passant par A et B avec $A \neq B$
- A et B étant deux points du plan d'abscisses différentes, la droite (AB) admet pour coefficient directeur :
▶ $a_{(AB)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ [1.1]
- La droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de coefficient directeur a admet pour équation réduite : ▶ $y = a(x - x_A) + y_A$ [1.2]

Définition

Soit a appartenant à $\mathcal{D}_f$. Pour tout réel $h \neq 0$ tel que $a + h \in \mathcal{D}_f$, on appelle **taux d'accroissement de f entre a et $a + h$** le nombre réel :

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Propriété [1.3]

Soit $a \in \mathcal{D}_f$. On note A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a et M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a + h$, $h \neq 0$. Alors le **taux d'accroissement de f entre a et $a + h$** est le **coefficient directeur** de la **droite (AM)** .

Définition

Soit f une fonction définie en a et dans un voisinage de a . Lorsqu'il existe, le **nombre dérivé** de f en a est la limite du taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ lorsque h tend vers zéro, et on note $f'(a)$ ce nombre :

$$\underbrace{f'(a)}_{\substack{\text{nombre} \\ \text{dérivé} \\ \text{de } f \text{ en } a}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Définition

Si le nombre dérivé de f en a existe, on dit que f est **dérivable** en a , de nombre dérivé $f'(a)$.

2. Tangente à une courbe en un point de cette courbe

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable en a et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a .

La **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A est la **droite passant par le point A** et qui admet pour **coefficient directeur $f'(a)$** .

[i] Parmi toutes les droites du plan qui passent par A , la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est celle qui « épouse » le mieux la courbe $\mathcal{C}_f$.

Lecture graphique du coefficient directeur de la tangente [2.1]

Soit B un point de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A , distinct de A . Alors :

$$\text{▶ } f'(a) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{variation des ordonnées}}{\text{variation des abscisses}}$$

Formule de la tangente [2.2]

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a admet pour équation :

$$\text{▶ } y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Formules d'approximations [2.3]

- une approximation affine de $f(x)$, pour x proche de a , est :
▶ $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$
- une approximation de $f(a + h)$ pour h proche de zéro, est :
▶ $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$

3. Fonction dérivée

Définition

Une fonction dérivable en tout nombre appartenant à un intervalle est **dérivable sur cet intervalle**.

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction définie sur I qui, à tout a appartenant à I associe le nombre dérivé de f en a s'appelle **fonction dérivée de f** et se note f' .

Dérivées de fonctions usuelles

La fonction affine $u : x \mapsto ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = a$.

La fonction constante $u : x \mapsto b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 0$.

La fonction linéaire $u : x \mapsto ax$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = a$.

La fonction carrée u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$.

La fonction cube u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 3x^2$.

La fonction inverse u est dérivable sur tout intervalle ne contenant pas zéro et $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

La fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $u'(x) = nx^{n-1}$, la formule étant identique pour n entier relatif tel que $n \leq -1$, la fonction étant alors définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

[i] On dit parfois que l'expression dérivée de x^2 est l'expression $2x$, que l'expression dérivée de x^3 est l'expression $3x^2$ etc.

Formules [3.1]

$$(ax + b)' = a \quad \blacktriangleright (b)' = 0 \quad \blacktriangleright (ax)' = a \quad \blacktriangleright (x^2)' = 2x$$

$$\blacktriangleright (x^3)' = 3x^2 \quad \blacktriangleright \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \blacktriangleright (x^n)' = nx^{n-1} \quad \blacktriangleright (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

❖ La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en zéro. [3.2]

Règles de dérivation [3.3]

Si la fonction u est dérivable sur un intervalle, alors les fonctions $u + k$, $u - k$, ku (k constante réelle) sont dérivables sur cet intervalle et :

$$\blacktriangleright (u + k)' = u' \quad \blacktriangleright (u - k)' = u' \quad \blacktriangleright (ku)' = ku'$$

Si les fonctions u et v sont dérivables sur un même intervalle, alors les fonctions $u + v$, $u - v$ et $u \times v$, aussi notée uv , sont dérivables sur cet intervalle et :

$$\blacktriangleright (u + v)' = u' + v' \quad \blacktriangleright (u - v)' = u' - v' \quad \blacktriangleright (uv)' = u'v + v'u$$

Si les fonctions u et v sont dérivables sur un même intervalle et la fonction v ne s'annule pas sur cet intervalle, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur cet intervalle et :

$$\blacktriangleright \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Théorème fondamental (admis) [3.4]

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , alors :

- dire que f est croissante sur I revient à dire que :
pour tout $x \in I$, le nombre $f'(x)$ est positif ou nul
- dire que f est décroissante sur I revient à dire que :
pour tout $x \in I$, le nombre $f'(x)$ est négatif ou nul
- dire que f est constante sur I revient à dire que :
pour tout $x \in I$, le nombre $f'(x)$ est nul

Extremum local [3.5]

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle et a un nombre appartenant à cet intervalle et distinct des bornes de celui-ci.

Si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en a , alors f admet un **minimum** ou un **maximum local** en a

Sens de variation de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) [3.6]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) :

- $\blacktriangleright$ si $a > 0$, alors $f \searrow$ sur $] -\infty; \alpha]$ et $f \nearrow$ sur $[\alpha; +\infty [$
 - $\blacktriangleright$ si $a < 0$, alors $f \nearrow$ sur $] -\infty; \alpha]$ et $f \searrow$ sur $[\alpha; +\infty [$
- $$\left(\alpha = -\frac{b}{2a} \right)$$

Démonstrations de cours

D01 Preuve de la formule [1.1]

Soient A et B deux points tels que $x_A \neq x_B$, la droite (AB) admet pour équation réduite : $y = ax + p$.

Objectif : montrer que $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

- écrire que $A \in (AB)$ et $B \in (AB)$, en déduire : $y_B - y_A = a(x_B - x_A)$
- en déduire a en fonction des coordonnées de A et B

D02 Preuve de la formule [1.2]

Soit d la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de coefficient directeur a , on note b son ordonnée à l'origine.

Objectif : montrer que d admet pour équation $y = a(x - x_A) + y_A$.

- donner l'équation réduite de d
- écrire que $A \in d$, en déduire que $b = y_A - ax_A$
- justifier qu'une équation de d est $y = a(x - x_A) + y_A$

D03 Preuve de la formule [1.3]

Soit $a \in \mathcal{D}_f$, $A \in \mathcal{C}_f$ d'abscisse a et M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a + h$.

Objectif : montrer que coefficient directeur de (AM) est égal au taux d'accroissement de f entre a et $a + h$

- donner les coordonnées de A
- donner les coordonnées de M
- en utilisant la formule du coefficient directeur d'une droite passant par deux points distincts, montrer que le coefficient directeur de (AM) est égal au taux d'accroissement de f entre a et $a + h$

D04 Preuve de la formule [2.1]

$A \in \mathcal{C}_f$, B appartient à la tangente T_A à $\mathcal{C}_f$ en A , $B \neq A$.

Objectif : montrer que $f'(a) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Pas d'indication...

D05 Preuve de la formule [2.2]

On note $T : y = mx + p$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a .

Objectif : montrer qu'une équation de T est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

- rappeler ce que représente graphiquement $f'(a)$
- appliquer la formule [1.2] donnant l'équation réduite d'une droite dont on connaît un point et le coefficient directeur

D06 Preuve de la formule [2.3]

Soit f dérivable en a .

Objectif 1 : pour x proche de a , $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$

- utiliser la formule [2.2] précédente

Objectif 2 : pour h proche de zéro, $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$

- poser $h = x - a$ dans l'approximation de $f(x)$

D07 Preuve de la dérivée de la fonction carrée [3.1]

Soit u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$, $a \in \mathbb{R}$.

Objectif : montrer que $u'(a) = 2a$

- donner la forme développée de $u(a + h)$
- en déduire que, pour $h \neq 0$: $\frac{u(a+h)-u(a)}{h} = 2a + h$
- faire tendre h vers 0 dans l'égalité précédente, puis conclure

D08 Preuve de la dérivée de la fonction inverse [3.1]

Soit u définie sur $\mathbb{R}^*$ par $u(x) = \frac{1}{x}$, a un réel non nul.

Objectif : montrer que $u'(a) = -\frac{1}{a^2}$

- montrer que, pour $h \neq 0$ et $a + h \neq 0$, $\frac{u(a+h)-u(a)}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$
- faire tendre h vers 0 dans l'égalité précédente, puis conclure

D09 Preuve de la mise en garde [3.2]

Soit u définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \sqrt{x}$.

Objectif : montrer que u n'est pas dérivable en 0.

- montrer que, pour $h > 0$, $\frac{u(0+h)-u(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$
- si h vers 0, quel est le « comportement » de $\sqrt{h}$, de $\frac{1}{\sqrt{h}}$?
- conclure

D10 Preuve de la dérivée d'un produit [3.3]

Soit u et v deux fonctions dérivables en $a \in \mathbb{R}$, $f(x) = u(x)v(x)$

Objectif : montrer que $f'(a) = u'(a)v(a) + v'(a)u(a)$

- en déduire que, pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = u(a+h) \frac{v(a+h) - v(a)}{h} + \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a)$$

- faire tendre h vers 0 dans l'égalité précédente, puis conclure

D11 Preuve des variations de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ [3.6]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$),

on pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

Objectif : montrer que

si $a > 0$, alors $f \searrow$ sur $] -\infty; \alpha]$ et $f \nearrow$ sur $[\alpha; +\infty [$

si $a < 0$, alors $f \nearrow$ sur $] -\infty; \alpha]$ et $f \searrow$ sur $[\alpha; +\infty [$

- calculer $f'(x)$
- on suppose $a > 0$, étudier le signe de $f'(x)$, conclure
- on suppose $a < 0$, étudier le signe de $f'(x)$, conclure

Activités élémentaires

A01 Déterminer l'équation réduite de la droite passant par $A(1; 3)$ et $B(4; 9)$.

A02 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = 2x^2 + 5x - 1$.

- montrer que, pour tout $h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 2h + 17$$

- en déduire $f'(3)$
- déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3

A03 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = -x^2 + 3x + 2$.

- montrer que, pour tout $h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -h + 5$$

- en déduire $f'(-1)$
- déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse (-1)

A04 On donne ci-contre la représentation graphique de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$$

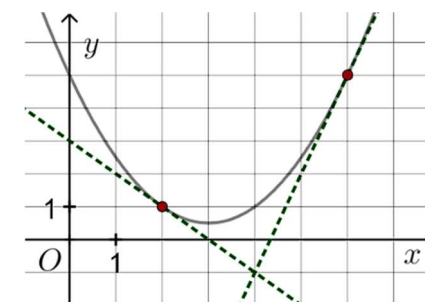
ainsi que les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en deux points à coordonnées entières.

- Par lecture graphique déterminer $f(2)$ et $f'(2)$.

En déduire l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

- Par lecture graphique, déterminer $f(6)$ et $f'(6)$.

En déduire l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 6.



A05 Calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = 5x + 3$

2. $f(x) = -x^2$

3. $f(x) = x^3 + x + 7$

A06 Vérifier que la proposition de $f'(x)$ est exacte.

1. $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

$f'(x) = \frac{-7}{(x-3)^2}$

2. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+5}$

$f'(x) = \frac{12x}{(x^2+5)^2}$

Activités plus intéressantes

A07 Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur cet intervalle et k une constante réelle. Démontrer les deux formules :

$$1. \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2} \quad 2. \left(\frac{k}{v}\right)' = \frac{-kv'}{v^2}$$

A08 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et T la tangente au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$, en déduire les variations de f puis dresser le tableau de variation de f .
3. Montrer que T admet pour équation réduite : $y = -x + \frac{11}{3}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

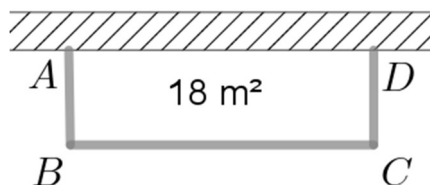
$$h(x) = f(x) - \left(-x + \frac{11}{3}\right)$$

- a. Montrer que, pour tout réel x , $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - \frac{8}{3}$.
- b. Démontrer que, pour tout réel x , $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
- c. En déduire une factorisation de $h(x)$.
- d. Dresser le tableau de signes de $h(x)$.
- e. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T .

A09 [grand classique]

On veut creuser le long d'un mur un potager rectangulaire d'aire 18 m^2 , et le clôturer sur ses trois côtés restés libres.

Déterminer les dimensions exactes de ce potager pour que la longueur totale de la clôture nécessaire pour le protéger soit minimale.



A10 D'après ancien bac autre série

Partie A

Un artisan fabrique des crêpes qu'il propose ensuite aux touristes de passage. Pour chaque semaine, il estime que le coût de production de x kilogrammes de crêpes, en euro, est donné par : $C(x) = x^2 + 60x + 121$, avec $x \in [1; 30]$.

Le coût moyen de production d'un kilogramme de crêpes est alors :

$$f(x) = \frac{C(x)}{x}, \text{ avec } x \in [1; 30].$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [1; 30]$, $f'(x) = \frac{(x-11)(x+1)}{x^2}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1; 30]$, puis dresser le tableau de variations de f . Quel est le minimum du coût moyen de production ?
rép : $f \searrow$ sur $[1; 11]$, $f \nearrow$ sur $[11; 30]$, $f(11) = 82$

Partie B

L'artisan vend chaque kilogramme de crêpes 110 €.

1. Montrer que le bénéfice réalisé après la fabrication et la vente de x kilogrammes de crêpes est donné par : $B(x) = -x^2 + 50x - 121$, avec $x \in [1; 30]$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction B .
Déterminer le nombre de kilogrammes de crêpes que l'artisan doit fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal.
Préciser la valeur de ce bénéfice maximal.
rép : $\alpha = 25$, $B(1) = -72$, $B(30) = 479$; 25 kg, bénéf max. = 504€

A11 Lors du premier essai d'un drone de loisir expérimental, on le fait décoller verticalement. Pendant les 8 premières secondes du vol, son altitude, exprimée en mètres, est modélisée par la fonction définie sur l'intervalle $[0; 8]$ par $h(t) = -\frac{1}{4}t^3 + 3t^2$. La vitesse ascensionnelle v en m/s est la dérivée par rapport au temps de la fonction h .

1. Quelle est l'altitude maximale du drone, et quand est-elle atteinte ?
2. Quelle est la vitesse ascensionnelle maximale du drone, et quand est-elle atteinte ?

rép : alt. maximale = 64 m, à 8 s ; vitesse asc. maximale = 12 m/s, à 4 s