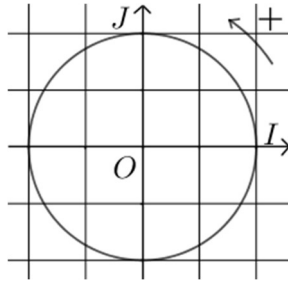


ACTIVITÉS 02. Trigonométrie

1. Quelques définitions

On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J) .

Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre.



Propriété [1.1]

► Le cercle trigonométrique a pour périmètre 2π .

2. Placer un point sur le cercle trigonométrique

Propriété [2.1]

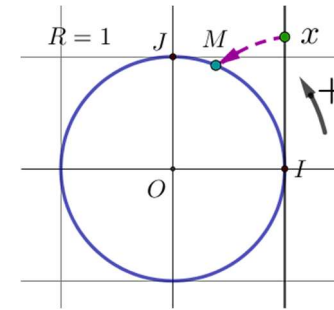
Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$, et si $x < 0$ alors : $|x| = -x$.

$\boxed{i}$ Intuitivement, la valeur absolue d'un nombre est « ce nombre privé de son signe » : $|-7| = 7$, $|+5| = 5$.

Point image d'un réel sur le cercle trigonométrique

Par « enroulement » de la droite réelle tracée tangente au cercle trigonométrique au point $I(1; 0)$, tout nombre réel x vient s'appliquer sur un point M du cercle appelé : M est l'**image du réel x sur le cercle trigonométrique**.

Pour placer ce point M : on part de $I(1; 0)$, on parcourt un arc de cercle de longueur $|x|$ dans le sens positif ou bien dans le sens négatif suivant que x est positif ou bien négatif.



On dit qu'une **mesure de l'angle de vecteurs** $(\vec{OI}, \vec{OM})$ est x radians, unité de mesure d'angle notée rad.

Formule [2.2]

$$\text{► } \pi \text{ rad} = 180^\circ = \frac{1}{2} \text{ tour}$$

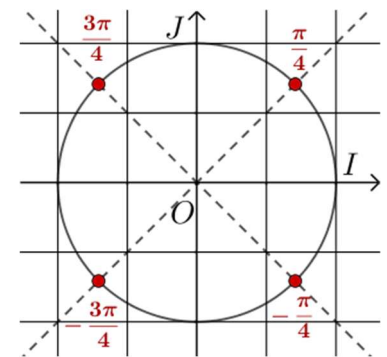
3. Cosinus et sinus d'un réel

Définition

Soit x un réel dont image est le point M sur le cercle trigonométrique, alors $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont les coordonnées du point M , autrement dit : abscisse de $M = \cos(x)$ et ordonnée de $M = \sin(x)$, ce qui s'écrit aussi : $M(\cos(x); \sin(x))$.

► Famille des multiples de : $\frac{\pi}{4}$ [3.1]

On trace les droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$, on marque leurs points communs avec le cercle trigonométrique, pour les points non triviaux du cercle les nombres $\cos(x)$ et $\sin(x)$ valent $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ le signe étant obtenu par simple lecture graphique



► **Famille des multiples de $\frac{\pi}{6}$** [3.2]

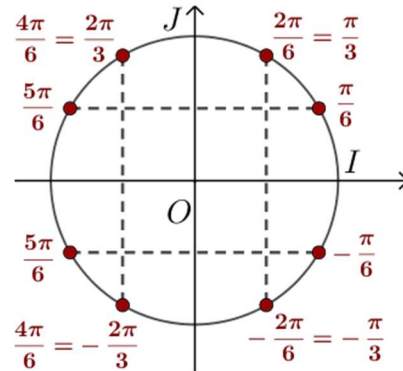
On trace les droites d'équations respectives

$$x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2},$$

on marque leurs points communs avec le cercle trigonométrique,

pour les points non triviaux du cercle les nombres $\cos(x)$ et $\sin(x)$ valent :

$$\pm \frac{1}{2} \text{ pour l'un, } \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ pour l'autre}$$



Formules des angles associés [4.5] [compléments]

Pour tout réel x :

► $\cos(-x) = \cos(x)$

► $\sin(-x) = -\sin(x)$

► $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$

► $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

► $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

► $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

► $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

► $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

► $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

► $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

[i] Tout réel multiple de $\frac{\pi}{3}$ appartient à la famille des $\frac{\pi}{6}$.

4. Quelques formules et propriétés [compléments]

► **Nombres ayant le même point image [4.1]**

Deux réels ont même point image sur le cercle trigonométrique si, et seulement si, leur différence est un multiple entier de 2π :
 $x \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}$ ont même image sur le cercle trigonométrique
 $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - x' = k \times 2\pi$.

► **Formule de périodicité [4.2]**

Pour tout réel x , et tout entier relatif k :

$$\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x) \text{ et } \sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$$

► **Formule d'encadrement [4.3]**

Pour tout réel x : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Variantes de notations

- on écrit $\cos^2(x)$ au lieu de $(\cos x)^2$ et $\sin^2(x)$ au lieu de $(\sin(x))^2$
- on écrit $\cos x$ au lieu de $\cos(x)$ et $\sin x$ au lieu de $\sin(x)$ uniquement lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion

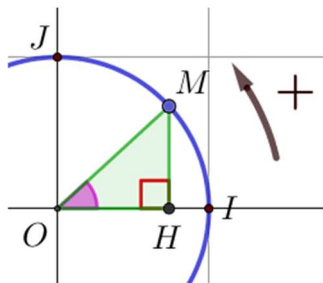
Formule de la somme des carrés [4.4]

Pour tout réel x : ► $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Démonstrations de cours

D01 preuve d'un cas particulier de [3.1]

Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on note M le point du cercle trigonométrique image de $\frac{\pi}{4}$, H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses, et enfin K son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées, point à ajouter sur la figure).



1. Convertir en degrés la mesure $\frac{\pi}{4}$ rad, en déduire les mesures en degré des angles du triangle OHM puis préciser la nature de ce dernier.
2. À l'aide du théorème de Pythagore, démontrer que $MH = \frac{\sqrt{2}}{2}$, en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
3. Justifier que le quadrilatère $OHMK$ possède quatre angles droits, en déduire que c'est un carré, puis justifier que $OK = \frac{\sqrt{2}}{2}$, en déduire $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

D02 On souhaite démontrer un cas particulier de [3. 2].

Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on note M le point du cercle trigonométrique image de $\frac{\pi}{6}$, H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses, M' le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

1. Convertir $\frac{\pi}{6}$ rad en degrés, en déduire les mesures en degré des angles du triangle OHM , puis les mesures des angles du triangle OMM' , En déduire la nature de ce dernier.

2. Que représente le point H pour le segment $[MM']$?

En déduire que $HM = \frac{1}{2}$, en déduire $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

3. À l'aide du théorème de Pythagore, démontrer que $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Activités élémentaires

A01 Convertir $\frac{\pi}{10}$ rad en degrés et 120° en radians. rép : $18^\circ, \frac{2\pi}{3}$ rad.

A02 Placer sur le cercle trigonométrique les points suivants : A est l'image de π , B est l'image de $\frac{\pi}{2}$ et C est l'image de $(-\frac{\pi}{2})$. En déduire le cosinus et le sinus de $\pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

A03 Placer sur le cercle trigonométrique les points suivants : A image de $\frac{3\pi}{4}$, B image de $-\frac{\pi}{4}$. En déduire le cosinus et le sinus de $\frac{3\pi}{4}$ et de $-\frac{\pi}{4}$.

A04 Placer sur le cercle trigonométrique les points suivants : A image de $\frac{\pi}{4}$, B image de $\frac{2\pi}{3}$. En déduire le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{2\pi}{3}$.

Activités plus intéressantes (utilisent les « compléments »)

A05 Montrer que les sommes suivantes sont nulles :

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \quad B = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)$$

A06 Démontrer que la somme suivante est nulle :

$$C = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$$