

ACTIVITÉS 01. Second degré

1. Généralités

f définie sur $\mathbb{R}$ est un **polynôme du second degré** $\stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ il existe trois réels a, b et c , avec $a \neq 0$, tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$. Dans l'**expression du second degré** $ax^2 + bx + c$, ax^2 est le **terme de plus haut degré**, bx le **terme du milieu**, et c le **terme constant**.

2. Forme canonique

Définition

La **forme canonique** est une écriture $a(x - \alpha)^2 + \beta$ où a, α et β sont des constantes réelles, avec $a \neq 0$.

Le **discriminant** Δ de $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, vérifie : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Formule [2.1]

$$\blacktriangleright (a \neq 0) \forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] (*)$$

Formule pour obtenir directement la forme canonique [2.2]

$$\blacktriangleright ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$$

3. Sens de variation

► Propriété [3.1] (admise)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

On pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$, alors :

► si $a > 0$, alors f est $\searrow$ sur $] -\infty; \alpha]$ et f est $\nearrow$ sur $[\alpha; +\infty[$

► si $a < 0$, alors f est $\nearrow$ sur $] -\infty; \alpha]$ et f est $\searrow$ sur $[\alpha; +\infty[$

4. Factorisation

Factorisation [4.1]

On considère l'expression $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, notons :

$$\blacktriangleright x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_0 = \frac{-b}{2a}$$

► si $\Delta > 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

► si $\Delta = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

► si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ n'est **pas factorisable** dans $\mathbb{R}$.

x_1 et x_2 sont les **racines** de $ax^2 + bx + c$, x_0 est une **racine double**.

i Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ on calcule la (les) racine(s) de $ax^2 + bx + c$ dans $\mathbb{R}$.

5. Etude du signe

Définition

La racine de $ax + b$, $a \neq 0$, est la valeur de x annulant $ax + b$.

► **Règle des signes du premier degré $ax + b$ [5.1]** (rappel)

Pour $a \neq 0$, $ax + b$ est « du signe de a à droite de sa racine ».

► **Règle des signes du second degré [5.2] [complément]**

On considère l'expression $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$:

- si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est « du signe de a à l'extérieur des racines et s'annule deux fois »
- si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est « partout du signe de a et s'annule une fois »
- si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est « partout du signe de a et ne s'annule jamais ».

6. Somme et produit des racines

Formule « somme et produit des racines » [6.1]

Si une expression $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, admet deux racines réelles

distinctes notées x_1 et x_2 , alors ► $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et ► $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

7. Parabole représentative [complément]

Définition

La **parabole** est la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré dans un repère orthogonal du plan.

Propriété [7.1]

La parabole $\mathcal{P}$ représentative de $x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, dans un repère orthogonal admet pour ► **sommet** $S(\alpha; \beta)$ et pour ► **axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$** . Le signe de a « décide » de l'orientation de la parabole $\mathcal{P}$: si $a > 0$, $\mathcal{P}$ est une parabole « sourire » et $S(\alpha; \beta)$ est le point le plus bas, si $a < 0$, $\mathcal{P}$ est une parabole « pas sourire » et $S(\alpha; \beta)$ est le point le plus haut.

Démonstrations de cours

D01 Justification de la formule [2.1]

Soient a, b et c trois réels, $a \neq 0$. Démontrer que, pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad (*)$$

D02 Justification de la formule [2.2]

a, b, c réels, $a \neq 0$, f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Démontrer que, pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ avec : } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{\Delta}{4a} = f(\alpha)$$

D03 Justification des formules de factorisation [4.1]

Soient a, b, c trois constantes, $a \neq 0$, on rappelle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad (*)$$

1. On suppose $\Delta > 0$, factoriser $ax^2 + bx + c$ dans $\mathbb{R}$.
2. On suppose $\Delta = 0$, donner une forme factorisée de $ax^2 + bx + c$.
3. On suppose $\Delta < 0$, montrer que $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, puis que supposer $ax^2 + bx + c$ factorisable aboutit à une contradiction, conclure.

D04 Justification de la règle des signes [5.2] [complément]

Soient a, b, c trois constantes, $a \neq 0$, on rappelle que :

si $\Delta > 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

si $\Delta = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$,

si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

1. On suppose $\Delta > 0$, dresser un tableau de signes à étages de lignes soient $x - x_1, x - x_2$ et a , la ligne bilan étant $a(x - x_1)(x - x_2)$, conclure.
2. On suppose $\Delta = 0$, dresser le tableau de signes à étages de lignes soient $(x - x_0)^2$ et a , la dernière ligne étant $a(x - x_0)^2$, puis conclure.
3. On suppose $\Delta < 0$, déterminer le signe de $(x - x_0)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$, puis celui de $ax^2 + bx + c$, conclure.

D05 Justification de la formule somme et produit des racines [6.1]

On considère une expression $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, admet deux racines réelles distinctes notées x_1 et x_2 .

1. Donner les expressions de x_1 et x_2 en fonction de a, b et Δ .
2. En déduire $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

D06 Justification de l'axe de symétrie de la parabole [7.1] [complément]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

On note $\mathcal{P}$ sa parabole représentative dans un repère orthogonal du plan, d la droite d'équation $x = \alpha$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $M(x_M; y_M)$ un point de $\mathcal{P}$ et $M'(x'_M; y'_M)$ son symétrique par rapport à d , I le milieu de $[MM']$.

Comme d est une droite verticale, la symétrie par rapport à d conserve les ordonnées : $y'_M = y_M$.

Objectif : montrer que $M' \in \mathcal{P}$.

1. Justifier que : $f(x_M) = y'_M$.
2. Justifier que : $x'_M = 2\alpha - x_M$.
3. En utilisant la forme canonique de $f(x)$, justifier que : $f(x'_M) = f(x_M)$.
4. Déduire des questions précédentes que : $M' \in \mathcal{P}$.

Activités élémentaires

A01 Sans utiliser la formule du cours, déterminer la forme canonique :

$$A(x) = x^2 + 8x - 9 \quad B(x) = x^2 + 6x + 9 \quad C(x) = (x - 1)(x + 4)$$

A02 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

À l'aide de la formule du cours, déterminer la forme canonique de $f(x)$.

A03 Sens de variation de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$.

A04 Sens de variation de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 6x + 1$.

A05 Factoriser sans utiliser la formule du cours :

$$\begin{array}{lll} A(x) = x^2 - 5x & B(x) = x^2 - 4 & C(x) = 9x^2 - 16 \\ D(x) = 3x^2 - 5 & E(x) = -x^2 + 9 & F(x) = 4x^2 - 25x \end{array}$$

A06 Donner une factorisation dans $\mathbb{R}$, lorsqu'elle existe.

$$A(x) = 2x^2 - 7x + 3 \quad B(x) = 9x^2 - 12x + 4$$

$$C(x) = -4x^2 + 20x - 25 \quad D(x) = x^2 - 6x + 10$$

rép :

$$A(x) = (x - 3)(2x - 1) \quad B(x) = 9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = (3x - 2)^2$$

$$C(x) = -4\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = -(2x - 5)^2 \quad D(x) \text{ non factorisable dans } \mathbb{R}$$

A07 Résoudre dans $\mathbb{R}$: 1. $0,5x^2 + x - 1,5 = 0$ 2. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

A08 Pour tout réel x , on pose : $f(x) = -2x^2 + 7x + 15$.

1. Montrer que, pour tout réel x : $f(x) = (-x + 5)(2x + 3)$.
2. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) \leq 0$.

A09 Déterminer le tableau de signes de : $3x^2 + x - 4$ (deux méthodes).

A10 Déterminer le tableau de signes de : $-x^2 + 3x + 4$ (deux méthodes).

A11 Pour tout réel x , on pose : $f(x) = 5x^2 + x - 22$.

1. Vérifier que 2 est une racine du polynôme f .
2. En utilisant formule de la somme, déterminer l'autre racine.
3. Factoriser $f(x)$.
4. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x(5x + 1) > 22$.

A12 Dans un repère orthonormé, on note $\mathcal{P}$ la parabole représentative de $f : x \mapsto -x^2 - 4x + 3$. Déterminer le sommet et l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$.

Activités plus intéressantes

A13 Factoriser dans $\mathbb{R}$:

$$A(x) = (2x - 1)(x + 4) + 6x^2 - 5x + 1 \quad \text{rép : } (2x - 1)(4x + 3)$$

$$B(x) = x^2 - 9x - (x - 9)(2x - 1) \quad \text{rép : } -(x - 9)(x - 1)$$

$$C(x) = x^2 - 4 + (3x + 5)(x + 2) \quad \text{rép : } (x + 2)(4x + 3)$$

A14 Résoudre dans $\mathbb{R}$, $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$. rép : $\{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$

A15 Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(2x - 1)(x + 2) \geq 3$. rép : $]-\infty; -\frac{5}{2}] \cup [1; +\infty[$

A16 Un studio rectangulaire d'aire 24 m^2 est constitué d'une pièce à vivre qui est un carré $ABCD$ et d'une cuisine qui est un rectangle $BEFC$ de largeur $BE = 2 \text{ m}$. Déterminer les dimensions de ce studio.

A17 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$1. x(3x - 1) = 10 \quad 2. x^2 - 3x\sqrt{3} = 12 \quad \text{rép : } \left\{-\frac{5}{3}; 2\right\}; \{-\sqrt{3}; 4\sqrt{3}\}$$

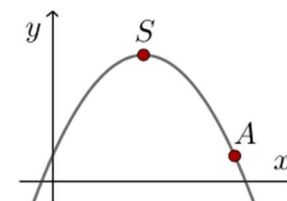
A18 Une unité de distance étant choisie, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que : $AB = x$, $AC = x + 1$ et $BC = x + 2$.

Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à 6. rép : $x = 3$, aire = 6

A19 Justifier que 2 est une racine de $x^2 + (\sqrt{3} - 2)x - 2\sqrt{3}$, déterminer astucieusement l'autre racine. rép : $-\sqrt{3}$

A20 Dans un repère orthogonal on donne la parabole $\mathcal{P}$ représentative de $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, on a placé le sommet $S(2; 5)$ de $\mathcal{P}$ et le point $A(4; 1)$ appartenant à $\mathcal{P}$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses du repère.



A21 La parabole $\mathcal{P}$ représentative de $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, coupe l'axe des abscisses aux valeurs (-1) et 3 et passe par le point $A(5; 6)$: déterminer a , b et c puis dresser le tableau de variation de f .

A22 Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est la parabole représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

On note S le sommet de $\mathcal{P}$ et on considère les points $A(2; 4)$ et $B(5; -2)$ non situés sur $\mathcal{P}$.

1. Donner la forme canonique de $f(x)$.
En déduire les coordonnées de S .
2. Déterminer l'équation réduite de (AB) .
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses.

