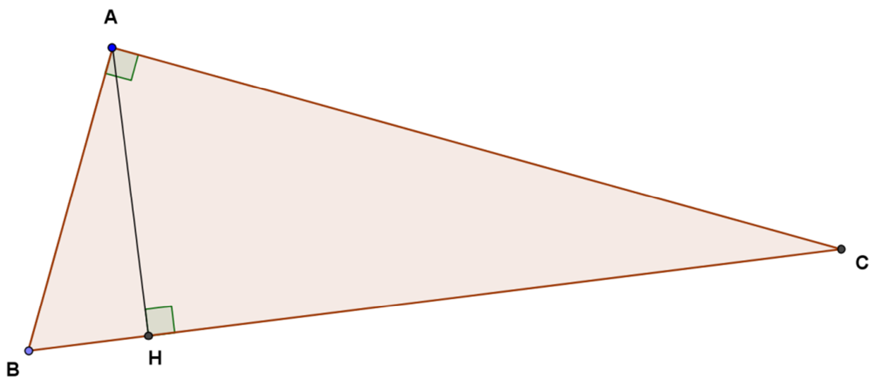
TROISIEMES Devoir Maison 02 Thème : trigonométrie

<u>Quelques égalités valables dans les triangles rectangles</u>



Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le projeté orthogonal de A sur (BC), et on admet que ce point H appartient au segment [BC].

1. On se place dans le triangle ABH rectangle en H . Exprimer $\cos(\widehat{ABH})$ à l'aide de certains côtés de ce triangle.
2. On se place dans le triangle ABC rectangle en A. Exprimer $\cos(\widehat{ABC})$ à l'aide de certains côtés de ce triangle.
3. Comparer les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{ABC}$, puis déduire de ce qui précède que : $BH \times BC = BA^2$.
4. Montrer de même que **:** $CH \times CB = CA^2$ **.**
5. Comparer, en justifiant, les mesures dans angles $\widehat{CAH}$ et $\widehat{ABH}$, puis montrer que : $\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{HC}{HA}$.

   En déduire que : $HB \times HC = AH^2$.
6. Par la méthode de votre choix, montrer que : $AB \times AC = BC \times AH$.
7. A présent, on considère le triangle ABC rectangle en A, tel que AB = 6 cm, AC = 8 cm. On note H le projeté orthogonal de E sur (BC).
   a. Calculer BC.
   b. Calculer BH en utilisant l'égalité obtenue de la question 3, puis calculer CH en utilisant l'égalité obtenue à la question 4. Vérifier que pour ces valeurs de BH et CH, la somme BH + CH donne bien la valeur précédemment obtenue pour BC.
   c. Calculer AH en utilisant l'égalité obtenue à la question 5.
   d. Calculer AH en utilisant l'égalité obtenue à la question 6.
   e. Construire ce triangle ABC à l'aide de Geogebra et faire afficher AH.

Remarque : vous devez m'envoyer par mail, en pièce jointe, le fichier .ggb obtenu à la question 7. e.

Corrigé

1. Le triangle ABH rectangle en H donc on peut écrire : $\cos(\widehat{ABH}) = \dfrac{BH}{BA}$.

2. Le triangle ABC rectangle en A donc on peut écrire : $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{BA}{BC}$.

3. Le point H appartient à [BC] donc B,H et C sont alignés dans cet ordre : on en déduit que les demi droites [BH) et [BC) sont confondues, et donc que les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{ABC}$ sont confondus. On en déduit que ces deux angles ont la même mesure, et par conséquent que $\cos\widehat{ABH} = \cos\widehat{ABC}$, puis, en utilisant les expressions obtenues aux deux questions précédentes, que : $\dfrac{BH}{BA} = \dfrac{BA}{BC}$. Par la méthode du produit en croix, on obtient :

   $BH \times BC = BA \times BA$, soit finalement : $BH \times BC = BA^2$.

4. Le triangle ACH est rectangle en H donc on peut écrire : $\cos(\widehat{ACH}) = \dfrac{CH}{CA}$.

   Le triangle ACB est rectangle en A donc on peut écrire : $\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{CA}{CB}$.

   Le point H appartient à [BC] donc C,H et B sont alignés dans cet ordre : on en déduit que les demi droites [CH) et [CB) sont confondues, et donc que les angles $\widehat{ACH}$ et $\widehat{ACB}$ sont confondus. On en déduit que ces deux angles ont la même mesure, et par conséquent que $\cos\widehat{ACH} = \cos\widehat{ACB}$, puis, en utilisant les expressions obtenues aux deux questions précédentes, que : $\dfrac{CH}{CA} = \dfrac{CA}{CB}$. Par la méthode du produit en croix, on obtient :

   $CH \times CB = CA \times CA$, soit finalement : $CH \times CB = CA^2$.

5. Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°, donc la somme des mesures des deux angles aigus d'un triangle rectangle est égale à $180° - 90°$, soit à : 90°.
   Récapitulons : dans un triangle rectangle, la somme des mesures des angles des deux angles aigus est égale à 90°.

   ACH est rectangle en H donc on en déduit que : $\widehat{CAH} + \widehat{ACH} = 90°$, d'où : $\widehat{CAH} = 90° - \widehat{ACH}$,
   puis : $\widehat{CAH} = 90° - \widehat{ACB}$ (égalité ①)

   Comme ABC est rectangle en A, on ne déduit que : $\widehat{CBA} + \widehat{ACB} = 90°$, puis : $\widehat{ACB} = 90° - \widehat{CBA}$.
   Remplaçons $\widehat{ACB}$ dans l'égalité ① : $\widehat{CAH} = 90° - \left(90° - \widehat{CBA}\right) = 90° - 90° + \widehat{CBA} = \widehat{CBA}$.

   On a : $\widehat{CAH} = \widehat{CBA}$, qui s'écrit aussi : $\widehat{CAH} = \widehat{HBA}$, ou encore : $\widehat{CAH} = \widehat{ABH}$. Les angles $\widehat{CAH}$ e t $\widehat{ABH}$ ont même mesure. Comme ces deux angles ont la même mesures, on a : $\tan\widehat{CAH} = \tan\widehat{ABH}$ (égalité ②)

   Le triangle ACH est rectangle en H donc on peut écrire : $\tan\widehat{CAH} = \dfrac{HC}{HA}$.

   De même, dans le triangle ABH rectangle en H : $\tan\widehat{ABH} = \dfrac{HA}{HB}$.

   En remplaçant dans l'égalité ② : $\dfrac{HC}{HA} = \dfrac{HA}{HB}$. On a donc bien : $\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{HC}{HA}$, d'où par la méthode du produit en croix : $HA \times HA = HB \times HC$, et finalement : $HB \times HC = HA^2$.

6. L'aire d'un triangle rectangle est donnée par la formule $Aire = \dfrac{produit\ des\ côtés\ de\ l'angle\ droit}{2}$,

qui donne ici : $Aire\ de\ ABC = \dfrac{AB \times AC}{2}$ (égalité ①)

D'autre part, l'aire d'un triangle quelconque est donnée par la formule :

$Aire = \dfrac{longueur\ d'un\ côté \times hauteur\ associée}{2}$; en choisissant le côté [BC], on obtient :

$Aire\ de\ ABC = \dfrac{AH \times BC}{2}$ (égalité ②)

En utilisant les égalités ① et ②, on obtient : $\dfrac{AH \times BC}{2} = \dfrac{AB \times AC}{2}$, puis en multipliant chaque membre par 2 :

$\dfrac{AH \times BC}{2} \times 2 = \dfrac{AB \times AC}{2} \times 2$, et finalement : $AH \times BC = AB \times AC$.

On a donc bien : $AB \times AC = AH \times BC$.

7. A présent, on considère le triangle ABC rectangle en A, tel que AB = 6 cm, AC = 8 cm. On note H le projeté orthogonal de E sur (BC).
   a. Calculons BC
      Le triangle ABC est rectangle en A donc on peut écrire l'égalité de Pythagore dans ce triangle :
      $AB^2 + AC^2 = BC^2$, qui donne ici : $6^2 + 8^2 = BC^2$, puis : $BC^2 = 36 + 64$, soit : $BC^2 = 100$ et finalement : BC = 10.
   b. Calculons BH
      On sait que $BH \times BC = BA^2$; en utilisant les distances connues, on obtient : $BH \times 10 = 6^2$,soit : $BH = \dfrac{36}{10}$,
      ou encore : $BH = 3,6$. Finalement : BH = 3,6 cm.
      Calculons CH
      On sait que $CH \times CB = CA^2$. En utilisant les distances connues, on obtient : $CH \times 10 = 8^2$, soit : $CH = \dfrac{64}{10}$,
      ou encore : $CH = 6,4$. Finalement : CH = 6,4 cm.
      Vérifions en calculant la somme BH + CH
      On a : BH + CH = 3,6 cm + 6,4 cm = 10 cm.
      Comme H appartient à [BC], on a : BH + CH = BC, et comme BH + CH = 10 cm, on en déduit que : BC = 10 cm, ce qui est bien en accord avec la valeur de BC obtenue par une autre méthode à la question a.
   c. Calculons AH en utilisant l'égalité obtenue à la question 5 : $HB \times HC = HA^2$
      En utilisant les distances connues, on obtient : $3,6 \times 6,4 = HA^2$, d'où : $HA^2 = 23,04$, puis : $HA = \sqrt{23,04}$.
      A l'aide de la calculatrice, on obtient : $HA = 4,8$. Finalement : AH = 4,8 cm.
   d. Calculons AH en utilisant l'égalité obtenue à la question 6 : $AB \times AC = AH \times BC$
      En utilisant les distances connues, on obtient : $6 \times 8 = AH \times 10$, d'où : $\dfrac{48}{10} = AH$, puis : $AH = 4,8$.
      Finalement : AH = 4,8 cm.
   e.