

Fonctions 2 variables 01

Métropole Juin 2010

4 points

Un équipementier fabrique pour une usine de l'industrie automobile deux types de sièges : un modèle « luxe » et un modèle « confort ».

Soit x le nombre, exprimé en **centaines**, de sièges « luxe » et y le nombre, exprimé en centaines, de sièges « confort » produits chaque mois.

La fonction coût mensuel de production est la fonction F définie pour x et y appartenant à l'intervalle $[0; 3]$ par :

$$F(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6.$$

$F(x, y)$ désigne le coût mensuel de production, exprimé en **dizaines de milliers** d'euros, pour x **centaines** de sièges « luxe » et pour y **centaines** de sièges « confort ».

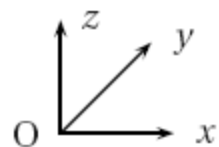
1. Au mois de janvier 2010, l'équipementier a produit 120 sièges « luxe » et 160 sièges « confort ». Justifier que le coût de production mensuel a été 12 000 euros.
2. Vérifier que, x et y étant deux nombres réels, $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1$.
En déduire que le coût de production mensuel minimal est 10 000 euros.
Préciser pour quelles quantités mensuelles respectives de sièges « luxe » et « confort » produites ce coût de production est obtenu.
3. À partir du mois de juillet 2010, la production mensuelle prévue de sièges est exactement 250.
 - a. Justifier que $y = 2,5 - x$.
Démontrer que, sous cette condition, le coût de production mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, est égal à $2x^2 - 3x + 2,25$.
 - b. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 2,5]$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 2,25$.
Dresser en le justifiant le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2,5]$.
 - c. En déduire les quantités mensuelles respectives de sièges « luxe » et « confort » que l'équipementier doit produire à partir du mois de juillet 2010 pour minimiser le coût mensuel de production. Préciser ce coût minimal.

Fonctions 2 variables 02

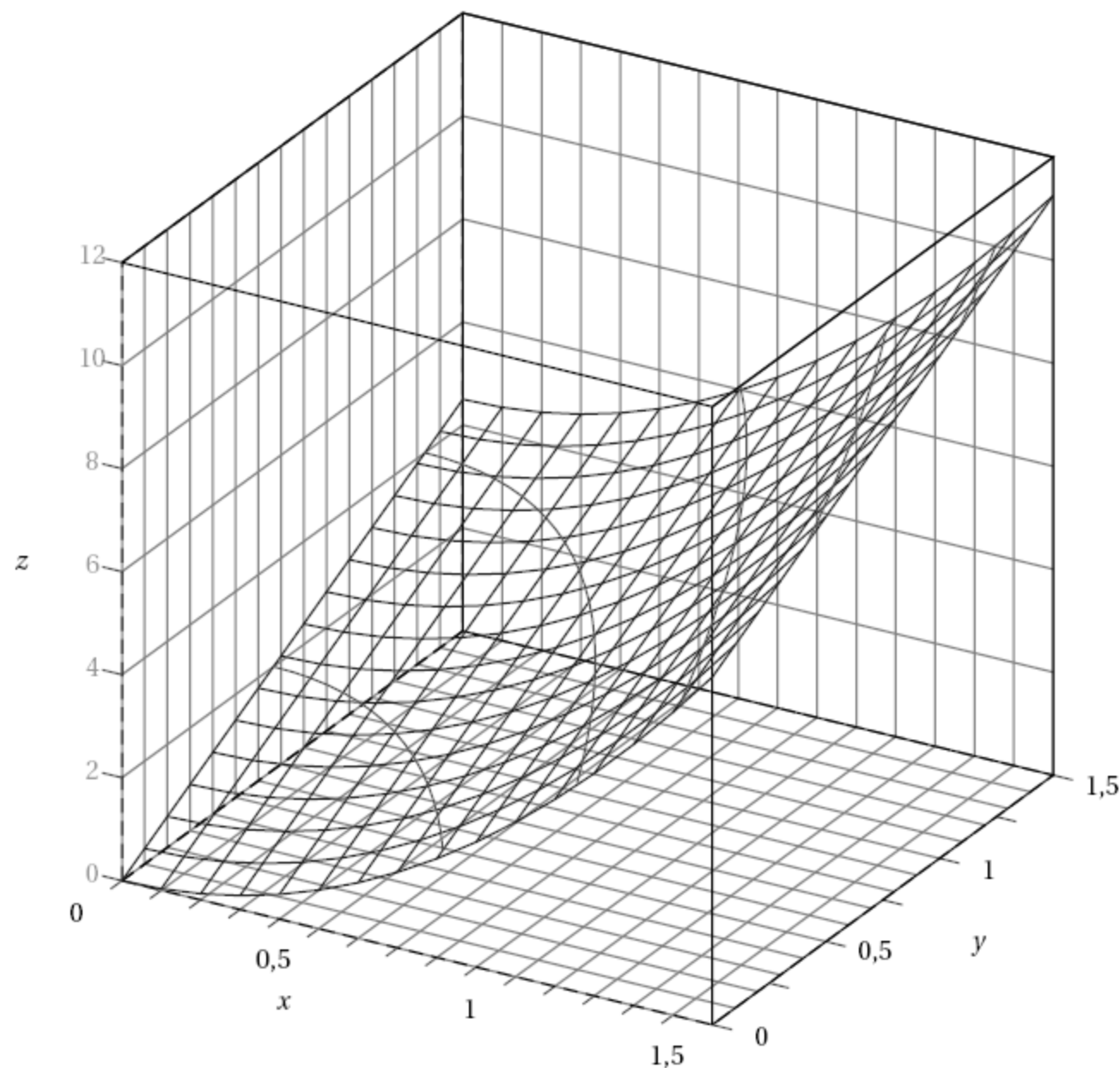
Antilles-Guyane Juin 2006

5 points

L'espace est rapporté à un repère orthogonal.



On a représenté ci-dessous la surface (S) d'équation $z = 3(x^2 + y)$, avec x appartenant à l'intervalle $[0 ; 1,5]$, et y appartenant à l'intervalle $[0; 1,5]$.



Partie A - Exploitation du graphique.

On considère le plan (P) d'équation $z = 6$.

1. Sur la figure donnée, placer le point A de coordonnées $(1; 1; 6)$.
2. Surlignez en couleur la partie visible de l'intersection de la surface (S) et du plan (P) sur la figure donnée.

Partie B - Recherche d'un coût minimum.

Une entreprise fabrique des unités centrales pour ordinateurs dont les composants sont essentiellement des cartes mères et des microprocesseurs.

On appelle x le nombre (exprimé en milliers) de microprocesseurs produits chaque mois et y le nombre (exprimé en milliers) de cartes mères produites chaque mois.

Le coût mensuel de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x; y) = 3(x^2 + y)$$

On se propose de trouver les quantités de microprocesseurs et de cartes mères que l'entreprise doit produire par mois pour minimiser ce coût.

1. La production mensuelle totale est de deux milliers de composants. On a donc $x + y = 2$.
Exprimer $C(x; y)$ en fonction de la seule variable x . On note f la fonction ainsi obtenue.
Vérifier que $f(x) = 3x^2 - 3x + 6$.
2. Montrer que sur l'intervalle $[0 ; 1,5]$, la fonction f admet un minimum atteint pour $x = 0,5$.
3. Quelles quantités de microprocesseurs et de cartes mères, l'entreprise doit-elle produire chaque mois pour minimiser le coût mensuel de production ? Quel est ce coût ?
4. Placer sur la figure donnée le point K correspondant au coût minimum.

Fonctions 2 variables 03

Liban Mai 2009

5 points

Une entreprise de services à la personne propose dans ses services l'entretien de jardins. Pour ce service, cette entreprise a recours à des employés à temps partiel pour une durée globale de x heures, et elle loue le matériel nécessaire pour une durée globale de y heures. La surface de jardin traitée en une semaine, exprimée en centaines de m^2 , est donnée par la fonction $f(x; y) = \sqrt{2xy}$ où x et y sont exprimées en heures.

Une heure de travail coûte 15 euros et une heure de location du matériel coûte 30 euros. Les contraintes matérielles imposent que $0 \leq x \leq 120$ et $0 \leq y \leq 100$.

La figure 1 donnée en annexe représente la surface \mathcal{S} d'équation $z = f(x; y)$.

La figure 2 donnée en annexe représente la projection orthogonale de la surface \mathcal{S} sur le plan (xOy) , les courbes de niveau de cette surface étant représentées pour z variant de 10 en 10.

1.
 - a. Les points $A(20; 40; z_A)$ et $B(60; y_B; 60)$ sont des points de la surface \mathcal{S} .
Déterminer pour chacun la coordonnée manquante.
 - b. Lire sur la figure 1 les coordonnées du point C et en donner une interprétation concrète.
 - c. Placer sur la figure 1 le point D de coordonnées $(10; 80; 40)$.
 - d. Donner la nature de la courbe de niveau $z = 50$.
2. Les contraintes financières imposent de fixer le coût hebdomadaire correspondant à 2 400 euros.
 - a. Démontrer que x et y sont liés par la relation $y = -\frac{1}{2}x + 80$.
 - b. Quelle est la nature de l'ensemble (\mathcal{E}) des points $M(x; y; z)$ de l'espace dont les coordonnées vérifient $y = -\frac{1}{2}x + 80$?
 - c. Représenter l'ensemble (\mathcal{E}) sur la figure 2 de l'annexe.
 - d. En déduire graphiquement la surface de jardin maximum qu'on peut traiter avec un coût hebdomadaire de 2 400 euros.
3.
 - a. Vérifier que, sous la contrainte $y = -\frac{1}{2}x + 80$, z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$, g étant la fonction définie sur $[0; 120]$ par $g(x) = \sqrt{160x - x^2}$.
 - b. Démontrer que sur $]0; 120[$, $g'(x) = \frac{80 - x}{\sqrt{160x - x^2}}$, g' désignant la fonction dérivée de g , puis démontrer que la fonction g admet un maximum sur l'intervalle $[0; 120]$.

Figure 1 :

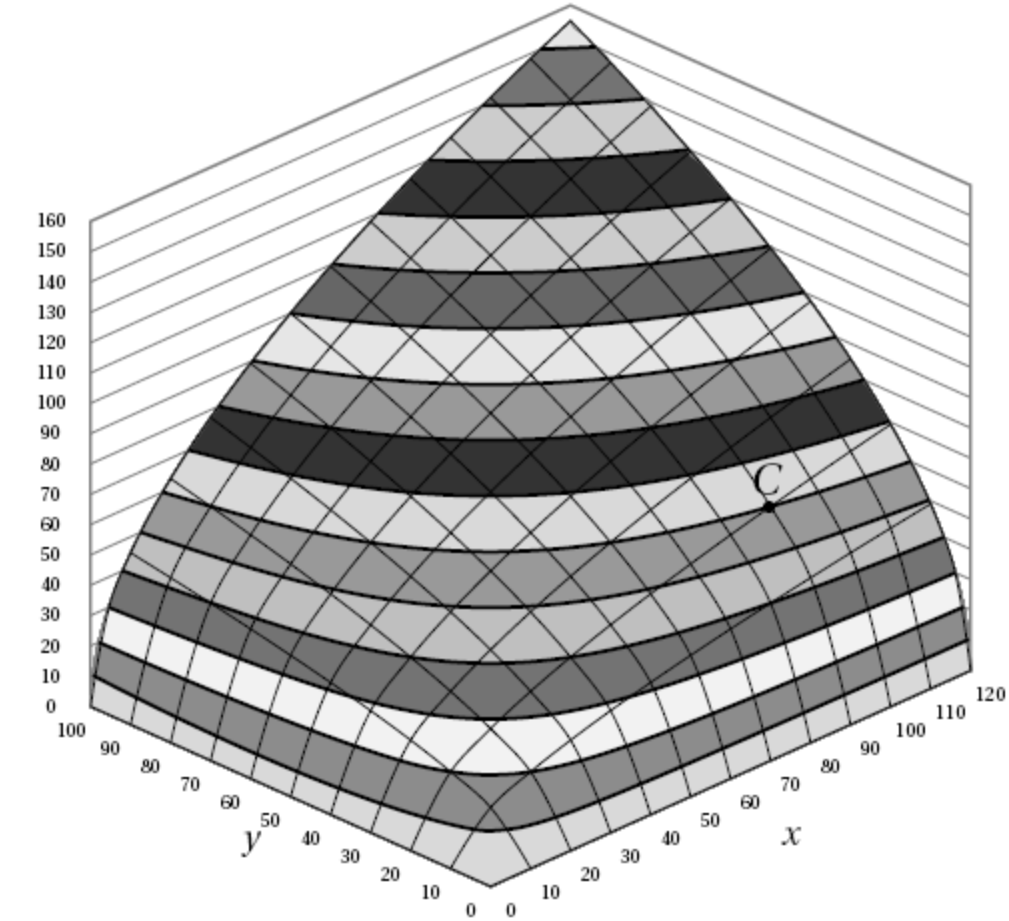
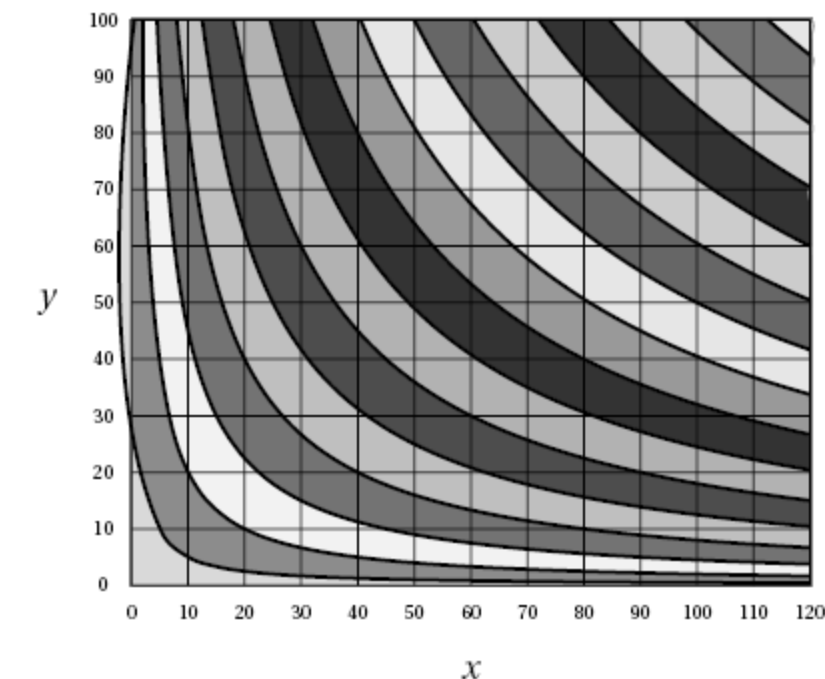


Figure 2 :



Fonctions 2 variables 04

Asie Juin 2004

5 points

Soit f la fonction définie pour tout réel x élément de $[0; 10]$ et pour tout réel y élément de $[0; 12]$ par :

$$f(x; y) = 2x(y + 1).$$

On donne ci-après la représentation graphique de la surface $z = f(x, y)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour financer un projet humanitaire, les adhérents d'une association décident de fabriquer des cartes de voeux.

Pour produire une quantité z de paquets de cartes, ils utilisent x décilitres d'encre A et y décilitres d'encre B. On admet que x , y et z sont liés par la relation

$$z = 2x(y + 1),$$

où x est un nombre entier compris entre 0 et 10, et y un nombre entier compris entre 0 et 12.

Dans tout l'exercice, les quantités d'encre seront exprimées en décilitres.

Partie A

- Combien de paquets de cartes peut-on fabriquer avec 7 décilitres d'encre A et 8 décilitres d'encre B?
 - Donner la quantité d'encre A, la quantité d'encre B, et le nombre de paquets de cartes associés respectivement aux points M, P et R à coordonnées entières, de la surface donnée ci-dessous.
- Quelle est la nature de la section de la surface par le plan d'équation $x = 4$, parallèle au plan (O, \vec{j}, \vec{k}) ? Justifier la réponse.

Partie B

Le prix d'un décilitre d'encre A est 6 € et celui d'un décilitre d'encre B est 2 €.

L'association décide d'investir 46 € dans l'achat des encres.

- Donner la relation entre les quantités x et y d'encres A et B achetées pour un montant de 46 €.
- Montrer alors que $z = -6x^2 + 48x$.
- Quelle quantité d'encre A l'association achètera-t-elle pour fabriquer le maximum de paquets de cartes?
 - Combien de paquets de cartes seront alors fabriqués?
 - Quelle quantité d'encre B sera alors utilisée?

