A. Notion de matrice

1. Définitions

Une **matrice** de **format** $\underbrace{n}_{\substack{nombre\\de\\lignes}} \times \underbrace{p}_{\substack{nombre\\de\\colonnes}}$ est un tableau de nombres réels ayant n lignes et p colonnes.

Les nombres $a_{i,j}$ sont les coefficients la matrice : il y a $n \times p$ coefficients dans une matrice $n \times p$.

Exemple $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice format 2×3 ; en posant $A = (a_{i,j})$ on a par exemple $a_{1,3} = 8$, nombre présent à l'intersection de la **ligne 1** et de la **colonne 3** ; la matrice A admet $2 \times 3 = 6$ coefficients.

Quelques matrices particulières

- une matrice formée d'une seule ligne s'appelle **matrice ligne** : son format s'écrit $1 \times p$,
- une matrice formée d'une seule colonne s'appelle **matrice colonne** : son format s'écrit $n \times 1$.
- une matrice ayant autant de lignes que de colonnes s'appelle **matrice carrée** : son format est $n \times n$, on dit que c'est une **matrice carrée d'ordre n**, à ne pas confondre avec son nombre de coefficients qui est égal à n^2.
- une matrice carrée dont les coefficients non situés sur la **diagonale principale** sont nuls, ceux de la diagonale principale pouvant être ou non nuls, s'appelle **matrice diagonale** : $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
  On note **Diag$(d_1, \dots, d_n)$** la matrice diagonale d'ordre n - donc de format $n \times n$ - dont les coefficients de la diagonale principale sont les réels d_1, ...,d_n : $\forall i \in \{1; \dots; n\}, \forall j \in \{1; \dots; n\}, i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$ et $a_{i,i} = d_i$.
- une matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 s'appelle **matrice identité** d'ordre n et est notée I_n : si $i \neq j$, alors $a_{i,j} = 0$ et pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$, $a_{i,i} = 1$.
- la **matrice nulle** de format $n \times p$, notée $\mathbf{0}_{n,p}$ est la matrice de taille $n \times p$, dont tous les coefficients sont nuls : $\forall i \in \{1; \dots; n\}, \forall j \in \{1; \dots; p\} : a_{i,j} = 0$; la matrice nulle carrée d'ordre n se note simplement 0_n et non $0_{n,n}$.

Exemples de matrices particulières

- matrice ligne de format 1×3 : $(5 \quad 7 \quad 8)$
- matrice carrée d'ordre 3 : $\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -1 & \sqrt{7} \\ 8 & \pi & 1 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- matrice colonne de format 3×1 : $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$
- matrice diagonale d'ordre 3 : $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
- matrice identité d'ordre 3 : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- matrice nulle de format 2×3 : $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- matrice nulle d'ordre 3 : $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Définition

Deux **matrices** sont **égales** lorsqu'elles ont même format **et** ont les mêmes coefficients aux mêmes places :
$A = B$ lorsque A et B sont de même format $n \times p$ et $\forall i \in \{1; \dots; n\}, \forall j \in \{1; \dots; p\} : a_{i,j} = b_{i,j}$.
Une **matrice carrée** d'ordre n est **symétrique** lorsque : $\forall i \in \{1; \dots; n\}, \forall j \in \{1; \dots; j\}$, on a : $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Exemple $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0{,}4 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0{,}4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée symétrique d'ordre 3.

Définition

Si A est de format $n \times p$, la **transposée de A**, notée $^t\!A$, est la matrice de format $p \times n$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A : les nombres formant la première ligne de A forment la première colonne de $^t\!A$, ceux la deuxième ligne de A forment la deuxième colonne de $^t\!A$ etc.

Exemple

si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 13 \end{pmatrix}$, alors : $^t\!A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$

2. Somme, différence, multiplication par un réel

Définition $\boldsymbol{A+B}$ et $\boldsymbol{A-B}$

Pour effectuer la **somme/différence** de deux matrices de même format : on ajoute/soustrait les coefficients situés aux mêmes endroits.
Pour A et B matrices de même format $n \times p$, la matrice $E = \boldsymbol{A+B}$ a, elle aussi, le format $n \times p$, et on a : $\forall i \in \{1; \dots; n\}, \forall j \in \{1; ..; p\}$, on a : $e_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$; la matrice $F = \boldsymbol{A-B}$ a, elle aussi, le format $n \times p$, et on a : $\forall i \in \{1; \dots; n\}, \forall j \in \{1; ..; p\}$, on a : $f_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j}$.

💣 il est impossible d'effectuer la somme/différence de matrices ayant des formats différents.

Exemple si $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 10 & 7 & 11 \end{pmatrix}$ et $A - B = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -8 \\ 6 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

Définition $\boldsymbol{\lambda A}$

Pour toute matrice A de format $n \times p$ et tout réel λ, les coefficients de la matrice $\boldsymbol{\lambda A}$ s'obtiennent en multipliant par le réel λ chaque coefficients de A, donc si $C = \lambda A$ alors $c_{i,j} = \lambda \times a_{i,j}$ où $i \in \{1; ..; p\}$ et $j \in \{1; ..; n\}$.

Opposé d'une matrice

La **matrice opposée** de A, notée $\boldsymbol{(-A)}$ est la matrice de même format que A et dont les coefficients sont les opposés de ceux de A.

Propriété

Soit A matrice de format $n \times p$, alors : $A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$ et $-A = (-1)A$

Conséquence

Soit A une matrice de format $n \times p$ alors : $A - A = -A + A = 0_{n,p}$.

Propriétés

Soient A, B, C trois matrices de même format, α et β deux réels.
On a immédiatement :
- la somme des matrices est commutative : $A + B = B + A$.
- la somme des matrices est associative : $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- $1 \times A = A$ • si A est de format $n \times p$, alors : $0 \times A = 0_{n,p}$ et $A - A = -A + A = 0_{n,p}$.
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ • $(\alpha - \beta)A = \alpha A - \beta A$ • $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ • $\alpha(A - B) = \alpha A - \alpha B$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

B. Produit de matrices

1. Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soient $L = (l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n)$ une matrice ligne, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne ayant le même nombre n de coefficients.
Le produit de la matrice ligne $\boldsymbol{L}$ par la matrice colonne $\boldsymbol{C}$ est le nombre réel : $l_1 \times c_1 + l_2 \times c_2 + \dots + l_n \times c_n$.
On utilise la notation abrégée avec « Sigma » :

$$\sum_{i=1}^{n} l_i \times c_i = l_1 \times c_1 + l_2 \times c_2 + \dots + l_n \times c_n$$

Remarque

Si l'on note $L = (l_{1,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ la matrice ligne et $C = (c_{i,1})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la matrice colonne, alors le produit de la matrice ligne L par la matrice colonne C est :

$$\sum_{k=1}^{n} l_{1,k} \times c_{k,1} = l_{1,1} \times c_{1,1} + l_{1,2} \times c_{2,1} + \dots + l_{1,n} \times c_{n,1}$$

💣 pour multiplier une matrice ligne par une matrice colonne elles doivent avoir le même nombre de coefficients.

2. Produit de deux matrices

Définition

Soient A une matrice de format $m \times n$ et B une matrice de format $n \times p$.
Le **produit des matrices** A et B dans cet ordre, noté $A \times B$ ou AB, est la matrice $C = \left(c_{i,j}\right)$ dont le coefficient de la ligne i et colonne j est le produit de la i-ième ligne de A par j-ième colonne de B et on a donc, pour tout $i \in \{1; \dots ; m\}$ et tout $j \in \{1; \dots ; p\}$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j}$$

le produit de deux matrices existe seulement lorsque les formats sont « compatibles » : le nombre de colonnes de la première matrice doit être égal au nombre de lignes de la deuxième matrice.

Exemple

Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$: le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B donc on peut effectuer le produit $A \times B$; on a :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{23} \\ \mathbf{28} & \mathbf{18} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\boldsymbol{c_{1,1}} = produit\ de\ ligne\ 1\ de\ A\ et\ colonne\ 1\ de\ B = 1 \times 6 + 5 \times 2 + 0 \times 10 = 16$
$\boldsymbol{c_{1,2}} = produit\ de\ la\ ligne\ 1\ de\ A\ et\ colonne\ 2\ de\ B = 1 \times 3 + 5 \times 4 + 0 \times 0 = 23$
$\boldsymbol{c_{2,1}} = produit\ de\ la\ ligne\ 2\ de\ A\ et\ colonne\ 1\ de\ B = 2 \times 6 + 3 \times 2 + 1 \times 10 = 28$
$\boldsymbol{c_{2,2}} = produit\ de\ la\ ligne\ 2\ de\ A\ et\ colonne\ 2\ de\ B = 2 \times 3 + 3 \times 4 + 1 \times 0 = 18$

On en déduit que : $A \times B = \begin{pmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{23} \\ \mathbf{19} & \mathbf{18} \end{pmatrix}$.

même si les produits $A \times B$ et $B \times A$ sont tous les deux définis, ce qui n'est pas toujours le cas, on obtient très souvent des résultats différents : le produit des matrices **n'est pas** commutatif. Si les deux produits existent on constate souvent que : $A \times B \neq B \times A$.

La « règle du produit nul » n'existe pas sur les matrices comme le montre le contre-exemple suivant :
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 1 + 1 \times 0 \\ 0 \times 1 + 0 \times 0 & 0 \times 1 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pourtant $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_2$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_2$

Propriétés

Soient A, B et C trois matrices et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que tous les produits de matrices existent, alors :

- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$ $(*)$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ $(**)$
- $(\lambda A) \times B = \lambda (A \times B) = A \times (\lambda B)$
- $I_n \times A = A \times I_n = A$ $(***)$

On dit que la multiplication des matrices est associative $(*)$, distributive par rapport à l'addition des matrices $(**)$, et enfin que I_n est élément neutre de la multiplication des matrices carrées d'ordre n $(***)$.

Puissance d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n.
On pose : $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$ et plus généralement : $A^k = \underbrace{A \times \dots \times A}_{k\ facteurs}$.

On rencontre parfois une formulation plus précise de la définition de A^k : $A^0 = I_n$ et $\forall k \in \mathbb{N}, A^{k+1} = A \times A^k$.