Nombres complexes II

$\boxed{D}$ Une **suite de nombres complexes** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.
• (z_n) est arithmétique $\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n + r$
on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \boldsymbol{z_n = z_p + (n-p) \times r}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{z_0 + \cdots + z_n = \frac{(z_0 + z_n) \times (n+1)}{2}}$$

• (z_n) est géométrique $\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = q \times z_n$
on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, z_n = z_p \times q^{n-p}$$

et si $q \neq 1$: $\forall n \in \mathbb{N}, z_0 + \cdots + z_n = z_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$\boxed{i}$ Déterminer la nature d'une suite c'est dire si elle est arithmétique, ou géométrique, ou bien ni l'un ni l'autre.

C01 On pose $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = iz_n + 1$.

1. Calculer z_1 et z_2 puis indiquerla nature de (z_n).
2. Déterminer $a \in \mathbb{C}$ tel que : $a = ia + 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $v_n = z_n - a$ où a est déterminé à la question précédente.
   a. Calculer v_0.
   b. Montrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison.
   c. Exprimer v_n en fonction de n.
4. Déduire des questions précédentes que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 - i^n)$$

5. Déterminer z_n suivant les valeurs de n.

$\boxed{D}$ Le **plan complexe** est le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ tel que $(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = +\dfrac{\pi}{2}$.
Le point M a pour **affixe** le complexe $x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
$\overset{déf}{\Leftrightarrow} M(x; y)$ dans $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on écrit : $z_M = x + iy$, ou $M(x + iy)$.
Le vecteur $\vec{u}$ a pour **affixe** le complexe $x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
$\overset{déf}{\Leftrightarrow} \vec{u}\binom{x}{y}$ dans $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on écrit : $z_{\vec{u}} = x + iy$ ou $\vec{u}(x + iy)$.
Pour x et y réels on a les équivalences :

$$\boldsymbol{M(x; y) \Leftrightarrow z_M = x + iy} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\vec{u}\binom{x}{y} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = x + iy}$$

$\boxed{i}$ À un point on peut associer un complexe et un seul, à un complexe on peut associer un point et un seul.
À un vecteur on peut associer un complexe et un seul, à un complexe on peut associer un vecteur et un seul.

$\boxed{P}$ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et λ un réel, alors :
• $\boldsymbol{z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}}$ • $\boldsymbol{z_{\vec{u}-\vec{v}} = z_{\vec{u}} - z_{\vec{v}}}$ • $\boldsymbol{z_{\lambda\vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}}$ • $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$
• I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\boldsymbol{z_I = \frac{z_A + z_B}{2}}$

C02 Justifier les cinq formules précédentes.

C03 Soit $ABCD$ est un parallélogramme tel que $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 2$ et $z_C = 6 + i$: déterminer l'affixe de D.

C04 G est le centre de gravité d'un triangle ABC, démontrer que :

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

C01 On pose $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = iz_n + 1$.

1. **Calculer z_1 et z_2 puis indiquerla nature de (z_n).**

$$z_1 = iz_0 + 1 = i(0) + 1 = 1$$
$$z_2 = iz_1 + 1 = i(1) + 1 = i + 1$$

Supposons (z_n) géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$, on aurait :

$z_1 = qz_0$

c'est-à-dire : $1 = q \times 0$ autremen dit $1 = 0$ ce qui est faux, donc il faut rejeter la supposition (z_n) est géométrique.

D'autre part : $z_2 - z_1 = i + 1 - 1 = i$ et $z_1 - z_0 = 1 - 0 = 0$.

On constate que $z_2 - z_1 \neq z_1 - z_0$ donc (z_n) n'est pas arithmétique.

Conclusion : (z_n) n'est ni arithémtique, ni géométrique.

2. **Déterminer $a \in \mathbb{C}$ tel que : $a = ia + 1$.**

$$a = ia + 1 \Leftrightarrow a - ia = 1 \Leftrightarrow a(1 - i) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{1 - i} \Leftrightarrow a$$
$$= \frac{1 \times (1 + i)}{1^2 + 1^2}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{1 + i}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = z_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

a. **Calcul de v_0**

$$v_0 = z_0 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

b. **Montrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = z_{n+1} - a = iz_n + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = iz_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$
$$= i\left(z_n + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{i}\right) = i\left(z_n + \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \times i}{i^2}\right)$$
$$= i\left(z_n - \left(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i^2\right)\right)$$
$$= i\left(z_n - \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\right) = i\left(z_n - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\right) = i\left(z_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$
$$= i \times v_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = iv_n$ et i est une constante donc (v_n) est géométrique de raison i.

Autre méthode

Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = z_{n+1} - a = iz_n + 1 - a$

Or, $a = ia + 1 \Leftrightarrow 1 - a = -ia$, donc :

$$iz_n + 1 - a = iz_n - ia = i(z_n - a) = iv_n$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = iv_n$ etc.

c. **v_n en fonction de n**

Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) i^n$

4. **z_n en fonction de n**

$$z_n = v_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) i^n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$= -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) i^n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$= -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) i^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \times 1$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-i^n + 1)$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 - i^n)$$

5. **z_n suivant le reste modulo 4 de n**

Par disjonction de cas suivant le reste modulo 4 de n :

- si $n \equiv 0\ [4]$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k$ et on a alors :

$$i^n = i^{4k} = (i^2)^{2k} = (-1)^{2k} = 1$$
$$z_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 - i^{4k}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 - 1) = 0$$

• si $n \equiv 1\ [4]$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 4k + 1$ et on a alors :

$$i^n = i^{4k+1} = i^{4k} \times i = 1 \times i = i$$

$$z_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 - i^{4k+1}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 - i)$$

$$= \frac{1}{2}(1+i)(1-i) = \frac{1}{2}(1^2 - i^2) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

• si $n \equiv 2\ [4]$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 4k + 2$ et on a alors :

$$i^n = i^{4k+2} = i^{4k} \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$$

$$z_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 - i^{4k+2}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 - (-1))$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \times 2 = 1 + i$$

• si $n \equiv 3\ [4]$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 4k + 3$ et on a alors :

$$i^n = i^{4k+3} = i^{4k} \times i^2 \times i = 1 \times (-1) \times i = -i$$

$$z_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 - i^{4k+3}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 - (-i))$$

$$= \frac{1}{2}(1+i)(1+i) = \frac{1}{2}(1 + 2i + i^2) = \frac{1}{2}(1 + 2i - 1) = i$$

Conclusion :

z_n prend les valeurs : 0, 1, $1 + i$ et i lorsque les restes modulo 4 de n sont respectievement égaux à 0, 1, 2 et 3.

$\boxed{D}$ Le **plan complexe** est le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ tel que $(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = +\frac{\pi}{2}$.

Le point M a pour **affixe** le complexe $x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ $\overset{déf}{\Leftrightarrow}$ $M(x; y)$ dans $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on écrit : $z_M = x + iy$, ou $M(x + iy)$.

Le vecteur $\vec{u}$ a pour **affixe** le complexe $x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ $\overset{déf}{\Leftrightarrow}$ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, on écrit : $z_{\vec{u}} = x + iy$ ou $\vec{u}(x + iy)$.

Pour x et y réels on a les équivalences :

$$\boldsymbol{M(x; y) \Leftrightarrow z_M = x + iy} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = x + iy}$$

$\boxed{i}$ À un point on peut associer un complexe et un seul, à un complexe on peut associer un point et un seul.
À un vecteur on peut associer un complexe et un seul, à un complexe on peut associer un vecteur et un seul.

$\boxed{P}$ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et λ un réel, alors :

• $\boldsymbol{z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}}$ • $\boldsymbol{z_{\vec{u}-\vec{v}} = z_{\vec{u}} - z_{\vec{v}}}$ • $\boldsymbol{z_{\lambda\vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}}$ • $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$

• I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\boldsymbol{z_I = \frac{z_A + z_B}{2}}$

C02 Démontrer les cinq formules précédentes.

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ où x, y, x' et y' sont réels, on a : $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ donc :

$$z_{\vec{u}+\vec{v}} = x + x' + i(y + y') = x + x' + iy + iy' = x + iy + x' + iy'$$

Or, $z_{\vec{u}} = x + iy$ et $z_{\vec{v}} = x' + iy'$, donc : $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$.

Notons $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ autrement dit :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A + i(y_B - y_A) = x_B - x_A + iy_B - iy_A$$

$$= x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$$

On a donc : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Soit I le milieu de $[AB]$, on a : $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$, donc :

$$z_{\overrightarrow{AI}} + z_{\overrightarrow{BI}} = z_{\vec{0}} \Leftrightarrow z_I - z_A + z_I - z_B = 0 \Leftrightarrow 2z_I = z_A + z_B$$

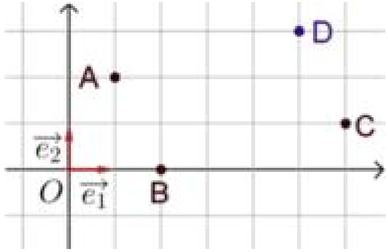
$$\Leftrightarrow z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

C03 Soit $ABCD$ est un parallélogramme tel que $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 2$ et $z_C = 6 + i$: déterminer l'affixe de D.

$ABCD$ est un parallélogramme donc :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow z_D = z_C - z_B + z_A$

$z_D = 6 + i - 2 + 1 + 2i \Leftrightarrow \boldsymbol{z_D = 5 + 3i}$



C04 ***G* est le centre de gravité d'un triangle *ABC*, démontrer que :**

$$\boldsymbol{z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}}$$

G est le centre de grvité du triangle ABC donc :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{GA}} + z_{\overrightarrow{GB}} + z_{\overrightarrow{GC}} = z_{\vec{0}}$$
$$\Leftrightarrow z_A - z_G + z_B - z_G + z_C - z_G = 0$$
$$\Leftrightarrow z_A + z_B + z_C = 3z_G \Leftrightarrow \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = z_G$$

On a donc bien :

$$\boldsymbol{z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}}$$

$\boxed{D}$ Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M(z)$, **le module** de z, noté $|z|$, est la distance OM :

$$|z| \overset{\text{def}}{=} OM$$

$\boxed{i}$ si $z \in \mathbb{R}$, alors le module de z et la valeur absolue de z coincident.

$\boxed{P}$ On a l'équivalence : $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

$\boxed{F}$ **quelques formules**

- si $z = x + iy$, x et y réels, alors : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : $z \times \bar{z} = |z|^2$
- $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

C05 Démontrer les formules précédentes.

$\boxed{F}$ Pour tous points A et B, on a : $|z_B - z_A| = AB$.

C06 Démontrer la formule précédente.

C07 Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ dans chacun des cas suivantes :

1. $|z + 3i| = 5$ **2.** $|z - 5 - 4i| = |z + 1 - 2i|$ **3.** $|\bar{z} - 1 + 5i| = 2$

$\boxed{F}$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall z' \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$

C08 Démontrer la formule $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

C09 Déterminer $|(1 + i)^{12}|$.

$\boxed{P}$ Pour tous nombres complexes z et z' telsque $z' \neq 0$, on a :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

C10 Démontrer la formule précédente.

$\boxed{P}$ **inégalité triangulaire**

$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z - z'| \leqslant |z| + |z'| \quad \text{et} \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

C11 Démontrer les deux inégalités précédentes.

$\boxed{D}$ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, pour tout complexe <u>non nul</u> z on note M le point d'affixe z et M' le point d'intersection de $[OM)$ avec le cercle trigonométrique.

Un argument de z, noté $\arg(z)$, **est une mesure** de l'angle $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$ c'est donc un réel ayant pour image M' sur le cercle trigonométrique.

L'**argument <u>principal</u>** de z, noté $\text{Arg}(z)$ avec un A majuscule est celle des mesures de $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$ qui appartient à $]-\pi; \pi]$.

Attention, le nombre **zéro** <u>n'a pas</u> d'argument !

$\boxed{D}$ Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M(z)$, **le module** de z, noté $|z|$, est la distance OM :

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} OM$$

$\boxed{i}$ si $z \in \mathbb{R}$, alors le module de z et la valeur absolue de z coincident.

$\boxed{P}$ On a l'équivalence : $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

$\boxed{F}$ **quelques formules**

- si $z = x + iy$, x et y réels, alors : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : $z \times \bar{z} = |z|^2$
- $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

C05 Posons $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z' = x' + iy'$, $(x', y') \in \mathbb{R}^2$

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$|z| = OM = \sqrt{{x_M}^2 + y_M^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

$-z = -(x + iy) = -x - iy = (-x) + i(-y)$, donc :

$$|-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$\bar{z} = x - iy = x + i(-y)$, donc :

$$|\bar{z}| = |x + i(-y)| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

- $z \times \bar{z} = |z|^2$

$z \times \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2$

$= \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2$

- **si** $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \times \bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$\boxed{F}$ Pour tous points A et B, on a : $|z_B - z_A| = AB$

C06 Démontrer la formule précédente.

Considérons deux points : $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

D'une part, la formule de la distance dans un repère orthonormé donne : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

D'autre part :

$|z_B - z_A| = |x_B + iy_B - (x_A + iy_A)| = |x_B - x_A + i(y_B - y_A)|$

$= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Donc $|z_B - z_A| = AB$.

C07 Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ dans chacun des cas suivantes : 1. $|z + 3i| = 5$ 2. $|z - 5 - 4i| = |z + 1 - 2i|$

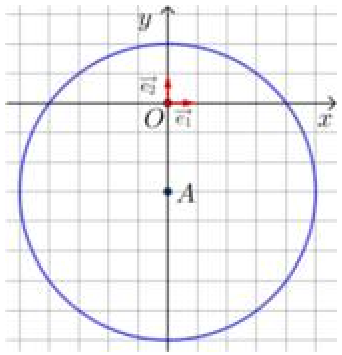
1. $|z + 3i| = 5$

Soit $A(-3i)$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $M(z)$. On a les équivalences :

$|z + 3i| = 5 \Leftrightarrow |z - (-3)| = 5 \Leftrightarrow [z_M - z_A| = 5 \Leftrightarrow AM = 5$

$\Leftrightarrow M$appartient au cercle de centre $A(-3i)$ et de rayon 5

L'ensemble cherche est le **cercle de centre $A(-3i)$ et de rayon 5**.



Autre méthode

On pose $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, et on note $\Omega(0\,;\,-3)$.

On a les équivalences :

$$|z+3i| = 5 \Leftrightarrow |x+iy+3i| = 5 \Leftrightarrow |x+i(y+3)| = 5$$
$$\Leftrightarrow |x+i(y+3)|^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2+(y+3)^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow (x_M-0)^2+(y_M-(-3))^2 = 5^2$$

On reconnait l'équation canonique du cercle de centre $\Omega(0;-3)$ et de rayon 5.

2. $\boldsymbol{|z-5-4i| = |z+1-2i|}$

Soit $A(4+4i)$, $B(-1+2i)$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $M(z)$.

On a les équivalences :

$|z-5-4i| = |z+1-2i| \Leftrightarrow |z-(5+4i)| = |z-(-1+2i)|$
$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M$ appartient à la médiatrice de $[AB]$

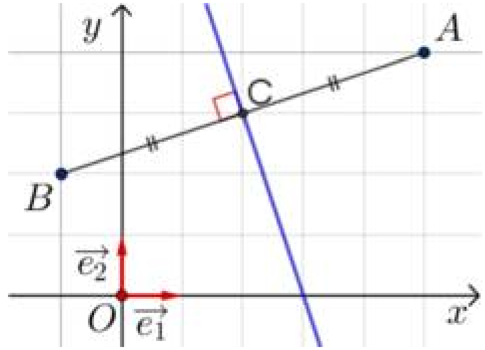
L'ensemble cherché est la médiatrice de $[AB]$ avec $(4+4i)$ et $B(-1+2i)$.

Autre méthode

Posons $z = x+iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$$|z-5-4i| = |z+1-2i| \Leftrightarrow |z-5-4i|^2 = |z+1-2i|^2$$
$$\Leftrightarrow |x+iy-5-4i|^2 = |x+iy+1-2i|^2$$
$$\Leftrightarrow |x-5+i(y-4)|^2 = |x+1+i(y-2)|^2$$
$$\Leftrightarrow (x-5)^2+(y-4)^2 = (x+1)^2+(y-2)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-10x+25+y^2-8y+16 = x^2+2x+1+y^2-4y+4$$
$$\Leftrightarrow -10x-8y+41 = 2x-4y+5$$
$$\Leftrightarrow -8y+4y = 2x+5+10x-41$$
$$\Leftrightarrow -4y = 12x-36 \Leftrightarrow 4y = -12x+36 \Leftrightarrow y = \frac{-12x+36}{4}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{-12x}{4}+\frac{36}{4} \Leftrightarrow y = -3x+9$$

L'ensemble cherché est la droite d'équation réduite $y = -3x+9$.



3. $\boldsymbol{|\bar{z}-1+5i| = 2}$

Soit $A(1+5i)$, on a les équivalences :

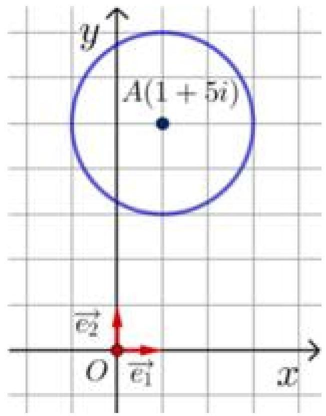
$$|\bar{z}-1+5i| = 2 \Leftrightarrow |\overline{\bar{z}-1+5i}| = 2 \Leftrightarrow |\bar{\bar{z}}-\bar{1}+\overline{5i}| = 2$$
$$\Leftrightarrow |z-1-5i| = 2 \Leftrightarrow |z-(1+5i)| = 2 \Leftrightarrow |z_M - z_A| = 2$$
$$\Leftrightarrow AM = 2$$
$\Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre $A(1+5i)$ et de rayon 2

Autre méthode

On pose $z = x+iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

$$|\bar{z}-1+5i| = 2 \Leftrightarrow |x-iy-1+5i| = 2$$
$$\Leftrightarrow |x-1+i(5-y)| = 2 \Leftrightarrow |x-1+i(5-y)|^2 = 2^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(5-y)^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-5)^2 = 2^2$$

On reconnait l'équation canonique du cercle de centre $\Omega(1+5i)$ et de rayon 2.



$\boxed{F}$ $\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

- $\boldsymbol{|z \times z'| = |z| \times |z'|}$
- $\boldsymbol{|z^n| = |z|^n}$

C08 Démontrer les formules $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' réels, on a :

$$\begin{aligned}
&|z \times z'| \\
&= |(x+iy)(x'+iy')| \\
&= |xx' - yy' + i(xy' + yx')| \\
&= \sqrt{(xx' - yy')^2 + (xy' + yx')^2} \\
&= \sqrt{(xx')^2 - 2xx'yy' + (yy')^2 + (xy')^2 + 2xy'yx' + (yx')^2} \\
&= \sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (yx')^2} \\
&= \sqrt{(xx')^2 + (xy')^2 + (yx')^2 + (yy')^2} \\
&= \sqrt{x^2x'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 + y^2y'^2} \\
&= \sqrt{(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)} \\
&= \sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{x'^2+y'^2} \\
&= |z| \times |z'|
\end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.

La formule, $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{|z^n| = |z|^n}$ se démontre par récurrence sur n.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on considère la conposition P_n : « $|z^n| = |z|^n$ » .

• <u>initialisation</u>

$|z^0| = |1| = 1 = |z|^0$ donc P_0 est vraie

• <u>hérédité</u>

Supposons P_k : $|z^k| = |z|^k$ vraie pour un certain entier naturel k et montrons que P_{k+1} est vraie.

On a : $|z^{k+1}| = |z^k \times z| = |z^k| \times |z| = |z|^k \times |z| = |z|^{k+1}$

donc P_{k+1} est vraie.

<u>Conclusion</u>

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie, autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$.

C09 Déterminer $\boldsymbol{|(1+i)^{12}|}$.

$$|(1+i)^{12}| = |1+i|^{12} = \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^6 = 2^6$$
$$= 64$$

On a donc finalement : $\boldsymbol{|(1+i)^{12}| = 64}$.

$\boxed{P}$ Pour tous nombres complexes z et z' telsque $z' \neq 0$:

$$\boldsymbol{\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}}$$

C10 Démontrer la formule précédente.

Soient z et z' deux complexes, $z' \neq 0$, on a :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$$

$\boxed{P}$ **inégalité triangulaire**

Pour tous nombres complexes z et z' :

$$\boldsymbol{|z - z'| \leqslant |z| + |z'|} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$$

C11 Démontrer les deux inégalités précédentes.

Soit M d'affixe z et M' d'affixe z'.

• **Montrons que : $\boldsymbol{|z - z'| \leqslant |z| + |z'|}$.**

L'inégalité triangulaire sur les distances vue au collège s'écrit :

$$\begin{aligned}
&M'M \leqslant M'O + OM \Leftrightarrow |z_M - z_{M'}| \leqslant |z_0 - z_{M'}| + |z_M - z_0| \\
&\Leftrightarrow |z - z'| \leqslant |0 - z'| + |z - 0| \Leftrightarrow |z - z'| \leqslant |-z'| + |z| \\
&\Leftrightarrow |z - z'| \leqslant |z| + |z'| \ (*)
\end{aligned}$$

• **Montrons que : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.**
On a : $|z + z'| = |z - (-z')| \leqslant |z| + |-z'|$, or $|-z'| = |z'|$,
donc : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

$\boxed{D}$ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, pour tout complexe non nul z on note M le point d'affixe z et M' le point d'intersection de $[OM)$ avec le cercle trigonométrique.

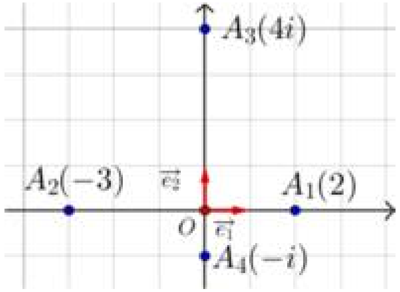
Un argument de z, noté $\mathbf{arg}(z)$, **est une mesure** de l'angle $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$ c'est donc un réel ayant pour image M' sur le cercle trigonométrique.

L'**argument principal** de z, noté $\mathbf{Arg}(z)$ avec un A majuscule est celle des mesures de $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$ qui appartient à $]-\pi; \pi]$.

Attention, le nombre **zéro** n'a pas d'argument !

C12 Donner sans démonstration, un argument de chacun des complexes :

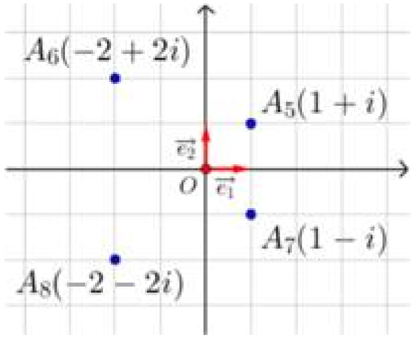
$z_1 = 2$, $z_2 = -3$, $z_3 = 4i$ et $z_4 = -i$.



C13 Donner sans démonstration, un argument de chacun des complexes :

$z_5 = 1 + i$, $z_6 = -2 + 2i$,

$z_7 = 1 - i$, $z_8 = -2 - 2i$.



$\boxed{P}$ Pour $z \neq 0$ et $z' \neq 0$, on a l'équivalence :

$$(z \neq 0 \text{ et } z' \neq 0), z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi] \end{cases}$$

$\boxed{P}$ Soit z un complexe <u>**non nul**</u> d'argument $\boldsymbol{\theta}$, on a les équivalences :

- $\boldsymbol{\theta \equiv 0}$ $\Leftrightarrow$ z est un **réel strictement positif**
- $\boldsymbol{\theta \equiv \pi}$ $\Leftrightarrow$ z est un **réel strictement négatif**
- $\boldsymbol{\theta} \equiv +\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\ [2\pi]$ $\Leftrightarrow$ z est un **imaginaire pur tel que $\mathbf{Im}(z) > 0$**
- $\boldsymbol{\theta} \equiv -\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\ [2\pi]$ $\Leftrightarrow$ z est un **imaginaire pur tel que $\mathbf{Im}(z) < 0$**

$\boxed{F}$ Soit $z = x + iy$, x et y réels, un complexe non nul d'argument $\boldsymbol{\theta}$:

- $z = |z|(\cos(\boldsymbol{\theta}) + i\sin(\boldsymbol{\theta}))$ est la **forme trigonométrique** de z
- $x = \mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\boldsymbol{\theta})$ et $y = \mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\boldsymbol{\theta})$
- $\boldsymbol{\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}}$ et $\boldsymbol{\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}}$

C14 Soit z un complexe de forme trigonométrique :

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Préciser le module et un argument de z puis déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z.

C15 Donner la forme trigonométrique de : $z_9 = 5i$, $z_{10} = -3i$, $z_{11} = 7$ et $z_{12} = -\sqrt{2}$.

$\boxed{i}$ **écritures $\boldsymbol{b(\cos(a) \pm i\sin(a))}$, $\boldsymbol{z \neq 0}$, $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ réels**

- soit $z = b(\cos(a) + i\sin(a))$, $z \neq 0$, a et b réels

– si $b > 0$, alors $b = |z|$ et a est un argument de z
– si $b < 0$, alors une transformation d'écriture est nécessaire

- soit $z = b(\cos(a) - i\sin(a))$, $z \neq 0$, a et b réels

– si $b > 0$, alors une transformation d'écriture est nécessaire
– si $b < 0$, alors une transformation d'écriture est nécessaire

C16 Déterminer la forme trigonométrique de $z = 7 - 7i$.

C17 Déterminer la forme trigonométrique de $z = 1 + \sqrt{3}\, i$.

$\boxed{P}$ **Formules d'addition en trigonométrie**

Pour tous réels a et b :

- $\boldsymbol{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$
- $\boldsymbol{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}$
- $\boldsymbol{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}$
- $\boldsymbol{\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)}$

C18 Soient a et b deux réels, M et N les points images sur le cercle trigonométrique de a et b respectivement.
En expimant de deux manières différentes $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM}$, retrouver la formule donnant $\cos(a-b)$, en déduire les trois autres formules.

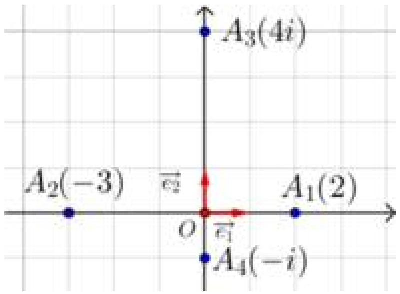
C12 donner un argument

$\arg(z_1) \equiv 0 \ [2\pi]$

$\arg(z_2) \equiv \pi \ [2\pi]$

$\arg(z_3) \equiv +\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$

$\arg(z_4) \equiv -\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$



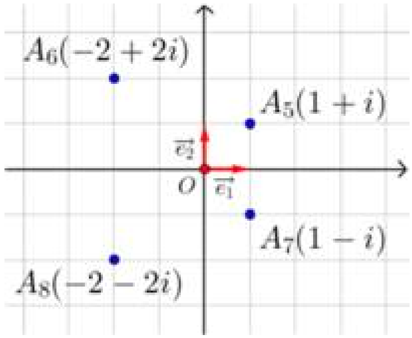
C13 Donner un argument :

$\arg(z_5) \equiv +\dfrac{\pi}{4} \ [2\pi]$

$\arg(z_6) \equiv +\dfrac{3\pi}{4} \ [2\pi]$

$\arg(z_7) \equiv -\dfrac{\pi}{4} \ [2\pi]$

$\arg(z_8) \equiv -\dfrac{3\pi}{4} \ [2\pi]$



$\boxed{P}$ Pour $z \neq 0$ et $z' \neq 0$, on a l'équivalence :

$$(\boldsymbol{z \neq 0 \text{ et } z' \neq 0}), \boldsymbol{z = z'} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{|z| = |z'|} \\ \boldsymbol{\arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi]} \end{cases}$$

$\boxed{P}$ Soit z un complexe **non nul** d'argument $\boldsymbol{\theta}$, on a les équivalences :

- $\boldsymbol{\theta \equiv 0} \ \Leftrightarrow z$ est un **réel strictement positif**
- $\boldsymbol{\theta \equiv \pi} \ \Leftrightarrow z$ est un **réel strictement négatif**
- $\boldsymbol{\theta} \equiv +\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur tel que $\mathrm{Im}(z) > 0$
- $\boldsymbol{\theta} \equiv -\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur tel que $\mathrm{Im}(z) < 0$

$\boxed{F}$ Soit $z = x + iy$, x et y réels, un complexe non nul d'argument $\boldsymbol{\theta}$:

- $z = |z|(\cos(\boldsymbol{\theta}) + i\sin(\boldsymbol{\theta}))$ est la **forme trigonométrique** de z
- $x = \mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\boldsymbol{\theta})$ et $y = \mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\boldsymbol{\theta})$
- $\cos(\boldsymbol{\theta}) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin(\boldsymbol{\theta}) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$

C14 Soit z un complexe de forme trigonométrique :

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Module, un argument, la partie réelle et la partie imaginaire de z...

$$|z| = 4, \arg(z) \equiv \frac{\pi}{6} \ [2\pi]$$

En développant l'écriture de départ :

$$z = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \times 4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{1}{2}i = 2\sqrt{3} + 2i$$

d'où : $\mathbf{Re(z) = 2\sqrt{3}}$ et $\mathbf{Im(z) = 2}$.

C15 Donner la forme trigonométrique de :

$z_9 = 5i$, $z_{10} = -3i$, $z_{11} = 7$, $z_{12} = -\sqrt{2}$ et $z_{13} =$.

- $z_9 = 5i = 5(0 + 1i) = \boldsymbol{5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}$
- $z_{10} = -3i = 3(0 + (-1)i) = \boldsymbol{3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}$
- $z_{11} = 7 = 7(1 + 0i) = \boldsymbol{7\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}$
- $z_{12} = -\sqrt{2} = \sqrt{2}(-1 + 0i) = \boldsymbol{\sqrt{2}(\cos(\pi) + i\sin(\pi))}$

$\boxed{i}$ **écritures $\boldsymbol{b(\cos(a) \pm i\sin(a))}$, $\boldsymbol{z \neq 0}$, $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ réels**

- soit $z = b(\cos(a) + i\sin(a))$, $z \neq 0$, a et b réels

– si $b > 0$, alors $b = |z|$ et a est un argument de z

– si $b < 0$, alors une transformation d'écriture est nécessaire

- soit $z = b(\cos(a) - i\sin(a))$, $z \neq 0$, a et b réels

– si $b > 0$, alors une transformation d'écriture est nécessaire

– si $b < 0$, alors une transformation d'écriture est nécessaire

C16 Déterminer la forme trigonmétrique de $z = 7 - 7i$.

$$|z| = \sqrt{(7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{49 + 49} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$7 - 7i = 7\sqrt{2}\left(\frac{7}{7\sqrt{2}} - \frac{7}{7\sqrt{2}}i\right) = 7\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= 7\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \mathbf{7\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

C17 **Déterminer la forme trigonométrique de $z = 1 + \sqrt{3}\, i$.**

$$|z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$1 + \sqrt{3}\, i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \mathbf{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

$\boxed{P}$ **Formules d'addition en trigonométrie**

Pour tous réels a et b :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

C18 **M et N points images sur le cercle trigonométrique de a et b respectivement. En expimant de deux manières $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}$, retrouver $\cos(a-b) = \cdots$, en déduire les trois autres formules.**

• $\mathbf{\cos(a-b)}$

On a : $M(\cos(a)\,;\sin(a))$ et $N(\cos(b)\,;\sin(b))$ donc $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{ON}\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$; or, le repère étant orthonormé on peut utiliser l'expression du produit scalaire dans un tel repère, donc :

$$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM} = \cos(b)\cos(a) + \sin(b)\sin(a)$$
$$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

D'autre part, on a : $\left(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM}\right) = a - b\ [2\pi]$ donc :

$$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM} = \left\|\overrightarrow{ON}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \times \cos(a-b)$$
$$= 1 \times 1 \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$$

Finalement : $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM} = \cos(a-b)$.

Des deux expressions de $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}$ on déduit :

$$\mathbf{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}$$

• $\mathbf{\cos(a+b)}$

Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}, cos(-x) = cos(x)\ et\ sin(-x) = -sin(x).$

On a :

$\cos(a+b)$

$= \cos(a-(-b))$

$= \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b)$

$= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)(-\sin(b))$

$= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

Finalement : $\mathbf{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$

• **Lemme** : $\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)}$ **et** $\mathbf{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)}$

<u>Preuve du Lemme</u>

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)$

$= 0 \times \cos(x) + 1 \times \sin(x) = \sin(x)$

Conclusion : $\mathbf{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)}$

D'après la première partie du Lemme :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

donc : $\mathbf{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)}$

• $\boldsymbol{\sin(a+b)}$

$$\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)$$

$$= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

Conclusion : $\boldsymbol{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}$.

• $\sin(a-b)$

$$\begin{aligned} &\sin(a-b) \\ &= \sin\big(a + (-b)\big) \\ &= \sin(a)\cos(-b) + \cos(a)\sin(-b) \\ &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)(-\sin(b)) \\ &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boldsymbol{\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)}$.

$\boxed{P}$ **Quelques formules**

Soit x un réel quelconque.

formules de l'angle double

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

formules de réduction d'un carré

- $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ • $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

angles associés

- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ • $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ • $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ • $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ • $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

C19 Démontrer à l'oral formules précédentes.

$\boxed{P}$ Pour tout nombre complexe <u>non nul</u> z, on a :

- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ • $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$

C20 Démontrer les deux formules précédentes.

$\boxed{P}$ Pour tous complexes <u>non nuls</u> z et z' et tout entier naturel n :

- $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n \times \arg(z)\ [2\pi]$

C21 Démontrer les deux formules précédentes.

C22 Déterminer la forme algébrique de :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2026}$$

$\boxed{P}$ Pour tous complexes <u>non nuls</u> z et z' :

- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ • $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

C23 Démontrer les deux formules précédentes.

C24 On pose :

$$a = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ et } b = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

En calculant de deux manières différentes $\dfrac{a}{b}$ déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

$\boxed{D}$ Pour tout <u>réel</u> α, on pose : $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.

On convient que : $e^{\alpha i} = e^{i\alpha}$ et que : $e^{-i\alpha} = e^{i(-\alpha)}$.

$\boxed{P}$ Pour tous <u>réels</u> α et α', on a :

- $|e^{i\alpha}| = 1$ • $e^{i\alpha} \times e^{i\alpha'} = e^{i(\alpha+\alpha')}$ • $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$

C25 Démontrer les trois formules précédentes.

$\boxed{P}$ Pour tout réel α, on a : $e^{-i\alpha} = \dfrac{1}{e^{i\alpha}}$.

C26 Démontrer la formule précédente.

$\boxed{D}$ Tout complexe z <u>non nul</u> admet pour **forme exponentielle $|z|e^{i\theta}$** où θ est un argument de z.

$\boxed{P}$ **Quelques formules**

Soit x un réel quelconque.

formules de l'angle double

• $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

• $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

formules de réduction d'un carré

• $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ • $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

angles associés

• $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ • $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

• $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ • $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

• $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ • $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

• $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ • $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

C19 Démontrer les formules de duplication.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

• $\boldsymbol{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)}$

On a, pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Pour $a = b = x$, on obtient :

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$$
$$= \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Or, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc : $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, donc :

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$$

On a aussi : $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ donc :

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

On a bien,pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)}$$

• $\boldsymbol{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)}$

On a, pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$:

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(b)$$

Pour $a = b = x$, on obtient :

$$\sin(2x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

On a bien : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)}$.

• $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

$$\frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1 + 2\cos^2(x) - 1}{2} = \frac{2\cos^2(x)}{2} = \cos^2(x)$$

On a bien, pour tout réel x :

$$\boldsymbol{\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

• $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

$$\frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2(x))}{2} = \frac{2\sin^2(x)}{2} = \sin^2(x)$$

On a bien, pour tout réel x :

$$\boldsymbol{\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

• **formule des angles associés**

Pour la première formule on utilise la formule d'addition $\cos(a+b)$ en faisant $a = \pi$, $b = x$ et on utilise les valeurs remarquables : $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$, on obtient :

$$\cos(\pi + x) = \cos(\pi)\cos(x) - \sin(\pi)\sin(x)$$
$$= -1\cos(x) - 0\sin(x) = -\cos(x)$$

donc : $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$.

Les autres formules s'obtiennent de manières analogues.

$\boxed{P}$ Pour tout nombre complexe non nul z, on a :

• $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ • $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$

C20 Démontrer les deux formules précédentes.

Soit $z \neq 0$, posons $\theta \equiv \arg(z)\ \ [2\pi]$, $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

Rappelons que : $|z| = |\bar{z}| = |-z|$.

• **Démontrons que $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$**

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|\cos(\theta) + i\,|z|\sin(\theta)$$

Donc :

$$\bar{z} = |z|\cos(\theta) - i\,|z|\sin(\theta) = |z|(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$$
$$= |z|(\cos(-\theta) + \sin(-\theta)) = |\bar{z}|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

On a : $\bar{z} = |\bar{z}|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ donc $-\theta$ est un argument de $\bar{z}$, autrement dit : $\boldsymbol{\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]}$.

• **Démontrons que $\arg(-z) \equiv \arg(z)\ [2\pi]$**

$$-z = -|z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|(-\cos(\theta) - i\sin(\theta))$$
$$= |z|(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$$
$$= |-z|(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$$

donc : $\theta + \pi$ est un argument de $-z$, autrement dit:

$\boldsymbol{\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]}$.

$\boxed{P}$ Pour tous complexes <u>non nuls</u> z et z' et tout entier naturel n :

• $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
• $\arg(z^n) \equiv n \times \arg(z)\ \ [2\pi]$

C21 Démontrer les deux formules précédentes.

$z \neq 0$ et $z' \neq 0$, θ un argument de z et θ' un argument de z', on a :

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \text{ et } z' = |z'|(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$$

• **Démontrons que : $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$**

On a :

$$z \times z' = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \times |z'|(\cos(\theta')) + i\sin(\theta'))$$
$$= |z| \times |z'| \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta))\,(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$$
$$= |z \times z'|(\cos(\theta)\cos(\theta') + i\cos(\theta)\sin(\theta') + i\sin(\theta)\cos(\theta') + i^2\sin(\theta)\sin(\theta'))$$
$$= |z \times z'|(\underbrace{\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')}_{\cos(\theta+\theta')} + i(\underbrace{\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')}_{\sin(\theta+\theta')}))$$
$$= |z \times z'|(\cos(\theta+\theta') + i(\sin(\theta+\theta'))$$

Ce qui m'ontre qu'un argument de $z \times z'$ est $\theta + \theta'$, autrement dit :

$$\boldsymbol{\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]}$$

• **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\arg(z^n) \equiv n \times \arg(z)\ [2\pi]$**

Se démontre sans difficulté par récurrence sur n…

C22 Déterminer la forme algébrique de :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2026}$$

On a d'une part :

$$\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2026}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right|^{2026} = \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right)^{2026}$$
$$= \left(\sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}}\right)^{2026} = \left(\sqrt{1}\right)^{2026} = 1^{2026} = 1$$

et d'autre part : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,i = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

donc :

$$\arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\ \ [2\pi]$$

D'où :

$$\arg\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2026}\right) \equiv 2026 \times \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$\equiv 2026 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) \equiv -2026 \times \frac{\pi}{4} \equiv -1013 \times \frac{\pi}{2}$$

$$\equiv -(506\times 2+1)\times\frac{\pi}{2}\equiv -506\times\pi-\frac{\pi}{2}\equiv -\frac{\pi}{2}+(-253)\times 2\pi$$
$$\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

Donc :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2026}=1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=0+i(-1)=-i$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2026}=-i}$$

$\boxed{P}$ Pour tous complexes non nuls z et z' :

• $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)\ [2\pi]$ • $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$

C23 Démontrer les deux formules précédentes.

On a : $0\equiv\arg(1)\equiv\arg\left(z\times\frac{1}{z}\right)\equiv\arg(z)+\arg\left(\frac{1}{z}\right)\ [2\pi]$

donc : $\boldsymbol{\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg z\ [2\pi]}$

Autre méthode :

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv\arg\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)\equiv\arg\left(\frac{1}{|z|^2}\times\bar{z}\right)\equiv\arg\left(\frac{1}{|z|^2}\right)+\arg(\bar{z})$$
$$\equiv 0+(-\arg(z))\equiv-\arg(z)\ [2\pi]$$

• **démontrons que** : $\boldsymbol{\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]}$

On a :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg\left(z\times\frac{1}{z'}\right)\equiv\arg(z)+\arg\left(\frac{1}{z'}\right)$$
$$\equiv\arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$$

C24 On pose :

$$\boldsymbol{a=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\ \text{ et }\ b=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

En calculant de deux manières différentes $\frac{a}{b}$ déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

D'une part, on a :

$$a=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right),\ \text{donc : } |a|=1 \text{ et } \arg(a)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$
$$b=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \text{donc : } |b|=1 \text{ et } \arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

Donc : $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}=\frac{1}{1}=1$

et $\arg\left(\frac{a}{b}\right)\equiv\arg(a)-\arg(b)\equiv\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\equiv\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\equiv\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

donc : $\frac{a}{b}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\ (*)$

D'autre part, on a : $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc :

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times\bar{b}}{|b|^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1^2}=\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$$
$$=\frac{1}{4}(\sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{2})=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Finalement :

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\quad(**)$$

En compartant $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\ \text{ et }\ \boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$\boxed{D}$ Pour tout réel $\boldsymbol{\alpha}$, on pose : $e^{i\boldsymbol{\alpha}} = \cos(\boldsymbol{\alpha}) + i\sin(\boldsymbol{\alpha})$.
On convient que : $\boldsymbol{e^{\alpha i} = e^{i\alpha}}$ et que : $\boldsymbol{e^{-i\alpha} = e^{i(-\alpha)}}$.

$\boxed{P}$ Pour tous réels $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\alpha'}$, on a :

• $|e^{i\boldsymbol{\alpha}}| = 1$ • $\boldsymbol{e^{i\alpha} \times e^{i\alpha'} = e^{i(\alpha+\alpha')}}$ • $\boldsymbol{(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}}$

C25 Démontrer les trois formules précédentes.

Soient α et α' deux réels, n un entier naturel.

• on a :

$$|e^{i\alpha}| = |\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)| = \sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = \sqrt{1} = \mathbf{1}$$

• démontrons que $e^{i\alpha} \times e^{i\alpha'} = e^{i(\alpha+\alpha')}$:

On a d'une part : $|e^{i\alpha} \times e^{i\alpha'}| = |e^{i\alpha}| \times |e^{i\alpha'}| = 1 \times 1 = 1$ et d'autre part : $\arg(e^{i\alpha} \times e^{i\alpha'}) = \arg(e^{i\alpha}) + \arg(e^{i\alpha'}) = \alpha + \alpha'$

Donc : $e^{i\alpha} \times e^{i\alpha'} = 1e^{i(\alpha+\alpha')} = e^{i(\alpha+\alpha')}$.

On a donc bien : $\boldsymbol{e^{i\alpha} \times e^{i\alpha'} = e^{i(\alpha+\alpha')}}$.

Autre méthode :

$e^{i\alpha} \times e^{i\alpha'} = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\alpha') + i\sin(\alpha'))$

$= \cos(\alpha)\cos(\alpha') + i^2\sin(\alpha)\sin(\alpha') + i(\cos(\alpha)\sin(\alpha') + \sin(\alpha)\cos(\alpha'))$

$= \cos(\alpha)\cos(\alpha') - \sin(\alpha)\sin(\alpha') + i(\cos(\alpha)\sin(\alpha') + \sin(\alpha)\cos(\alpha'))$

$= \underbrace{\cos(\alpha)\cos(\alpha') - \sin(\alpha)\sin(\alpha')}_{\cos(\alpha+\alpha')} + i\left(\underbrace{\sin(\alpha)\cos(\alpha') + \cos(\alpha)\sin(\alpha')}_{\sin(\alpha+\alpha')}\right)$

$= \cos(\alpha + \alpha') + i\sin(\alpha + \alpha')$

$= e^{i(\alpha+\alpha')}$

$\boxed{P}$ Pour tout réel $\boldsymbol{\alpha}$, on a : $e^{-i\boldsymbol{\alpha}} = \frac{1}{e^{i\boldsymbol{\alpha}}}$.

C26 Démontrer la formule précédente.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{-i\alpha} \times e^{i\alpha} = e^{i(-\alpha)} \times e^{i(\alpha)} = e^{i(-\alpha+\alpha)} = e^{i0}$$
$$= \cos(0) + i\sin(0) = 1$$

Résumons : $e^{-i\alpha} \times e^{i\alpha} = 1$ donc : $\boldsymbol{e^{-i\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha}}}$.

Autre méthode :

$$\frac{1}{e^{i\alpha}} = \frac{1}{\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)} = \frac{1 \times (\cos(\alpha) - i\sin(\alpha))}{(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha))}$$
$$= \frac{\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = \frac{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)}{1} = e^{-i\alpha}$$

$\boxed{D}$ Tout complexe z non nul admet pour **forme exponentielle $|z|e^{i\theta}$** où θ est un argument de z.

C27 Donner la forme exponentielle de : 5, $-7i$ et $\sqrt{3}+i$.

$\boxed{P}$ **Formules d'Euler**

Pour tout réel θ,on a :

$$\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

C28 Démontrer les formules d'Euler.

C29 En utilisant les formules d'Euler, démontrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \cos^3(x)=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)$$

$\boxed{P}$ **Formule de Moivre**

Pour tout réel θ et tout entier naturel n, on a :

$$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n$$

C30 Démontrer la formule de Moivre.

C31 En exprimant de deux manières $(\cos(x)+i\sin(x))^2$ où $x\in\mathbb{R}$ retrouver les formules de trigonométrie donnant $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

C32 Pour $x\in\mathbb{R}$ exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.

$\boxed{P}$ A, B et C trois points deux à deux distincts du plan complexe de repère $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, alors :

$$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB})\equiv\arg(z_B-z_A)\ [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\ [2\pi]$$

C33 On souhaite démontrer les deux formules précédentes.
On se place dans le plan complexe de repère$(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

1. Soient A et B deux points distincts et M le point d'affixe z_B-z_A : quelle est la mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM})$?
   En déduire : $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB})\equiv\arg(z_B-z_A)\ \ [2\pi]$.
2. On admet que, pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a :
   $(\vec{v},\vec{u})=-(\vec{u},\vec{v})\ [2\pi]$ et $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})\ [2\pi]$.
   Soient A, B et C trois points deux à deux distincts.
   Démontrer que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\ \ [2\pi]$.

C34 On pose : $z_A=2+3i$, $z_B=4+2i$ et $z_C=3+5i$.
Calculer le module et un argument de $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.
En déduire la nature du triangle ABC.

$\boxed{D}$ On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

$\mathbb{U}$ est parfois appelé **« cercle unité »** même s'il ne s'agit pas d'un ensemble de points mais de nombres complexes.

$\boxed{P}$ **quelques propriétés**

- $z\in\mathbb{C}$ a pour module 1 $\Leftrightarrow$ il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $z=e^{i\theta}$
- $z\in\mathbb{U}\Leftrightarrow\exists\theta\in\mathbb{R}, z=e^{i\theta}$
- si $z\in\mathbb{U}$ et $z'\in\mathbb{U}$, alors $z\times z'\in\mathbb{U}$ et $\frac{z}{z'}\in\mathbb{U}$

C35 Démontrer la stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et quotient.

$\boxed{D}$ Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on appelle **racine n-ième de l'unité** toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation: $z^n=1$.

On note parfois $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

C27 Donner la forme exponentielle de : 5, $-7i$ et $\sqrt{3}+i$.

- $5 = 5(1+0i) = 5(\cos 0 + i\sin 0) = \boldsymbol{5e^{0i}}$
- $-7i = 7(0-i) = 7\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \boldsymbol{7e^{-i\frac{\pi}{2}}}$
- $\left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \boldsymbol{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

P Formules d'Euler

Pour tout réel θ,on a :

$$\boldsymbol{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

Ne pas oublier ***i*** au dénominateur pour $\sin(\theta)$.

C28 Démontrer les formules d'Euler.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$.

Donc, par somme :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$$
$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos(\theta)$$

et par différence :

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$$
$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin(\theta)$$

C29 En utilisant les formules d'Euler, démontrer que :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, \cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)}$$

Pour tout réel x, on a : $\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, donc :

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^3}{2^3}$$
$$= \frac{(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3}{8}$$
$$= \frac{e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}}{8}$$
$$= \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8}$$
$$= \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{8} + 3\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{8}$$
$$= \frac{1}{4}\times\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \frac{3}{4}\times\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{8}$$
$$= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

P Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier naturel n, on a :

$$\boldsymbol{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n}$$
$$\boldsymbol{e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n}$$

C30 Démontrer la formule de Moivre.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

D'une part : $\left|e^{in\theta}\right| = 1$ et $\left|e^{\theta}\right|^n = 1^n = 1$ donc $\left|e^{in\theta}\right| = \left|\left(e^{i\theta}\right)^n\right|$

D'autre part :

$$\arg\left(e^{in\theta}\right) \equiv n\theta \equiv n \times \arg\left(e^{i\theta}\right) \equiv \arg\left(\left(e^{i\theta}\right)^n\right) \ [2\pi]$$

Les deux complexes $e^{in\theta}$ et $\left(e^{i\theta}\right)^n$ ont même modules et même argument modulo $[2\pi]$ donc ils sont égaux.

Puis :

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$$

C31 En exprimant de deux manières $(\cos(x) + i\sin(x))^2$ où x est un réel quelconque, retrouver les formules de trigonométrie donnant $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a d'une part :

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^2 &= (\cos x)^2 + 2i\cos x\sin x + i^2\sin^2 x\\ &= \cos^2 x - \sin^2 x + 2i\sin x\cos x\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$(\cos x + i\sin x)^2 = (e^{ix})^2 = e^{2ix} = \cos 2x + i\sin 2x$$

Donc : $\cos^2 x - \sin^2 x + 2i\sin x\cos x = \cos 2x + i\sin 2x$.

Or, deux complexes sont égaux lorsque leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales, donc :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{et} \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

<u>Conclusion</u> :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{et} \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x}$$

C32 Pour $x \in \mathbb{R}$ exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}&\cos(3x) + i\sin(3x)\\ &= e^{3ix}\\ &= (e^{ix})^3\\ &= (\cos(x) + i\sin(x))^3\\ &= \cos^3(x) + 3\cos^2(x)\sin(x)\,i + 3\cos(x)\sin^2(x)\,i^2 + i^3\sin^3(x)\\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + i(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x))\end{aligned}$$

Or, deux complexes sont égaux lorsque leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales, donc on a d'une part :

$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)$$

or, $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, donc :

$$\begin{aligned}&\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\,(1 - \cos^2(x))\\ \Leftrightarrow\ &\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x) + 3\cos^3(x)\\ \Leftrightarrow\ &\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)\end{aligned}$$

<u>Conclusion 1</u> : $\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)}$ $(*)$.

et d'autre part :

$$\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$$

Or, $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, donc :

$$\begin{aligned}&\sin(3x) = 3(1 - \sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x)\\ \Leftrightarrow\ &\sin(3x) = 3(\sin(x) - \sin^3(x)) - \sin^3(x)\\ \Leftrightarrow\ &\sin(3x) = 3\sin(x) - 3\sin^3(x) - \sin^3(x)\\ \Leftrightarrow\ &\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^4(x)\end{aligned}$$

<u>Conclusion 2</u> : $\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^4(x)}$ $(**)$.

$\boxed{P}$ A, B et C trois points deux à deux distincts du plan complexe de repère $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, alors :

$$\boldsymbol{(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]}$$

$$\boldsymbol{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]}$$

C33 On souhaite démontrer les deux formules précédentes.
On se place dans le plan complexe de repère $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

1. **Soient A et B deux points distincts et M le point d'affixe $z_B - z_A$: quelle est la mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$? En déduire : $(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$.**

   Par définition d'un argument : $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}) \equiv \arg(z_M)\ [2\pi]\,(*)$.

   Or, d'une part les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont même affixe $z_B - z_A$ donc ils sont égaux,et d'autre part $z_M = z_B - z_A$ donc $(*)$ s'écrit aussi : $\boldsymbol{(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]}$.

2. **On admet que, pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a : $(\vec{v}, \vec{u}) \equiv -(\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$ et $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w})\ [2\pi]$.**

   Soient A, B et C trois points deux à deux distincts.

   Démontrer que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.

On a :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{e_1}) + (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AC}) \equiv -(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AC})$$
$$\equiv -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_C - z_A) \equiv \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A)$$
$$\equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi]$$

On a donc bien :

$$\boldsymbol{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi]}$$

C34 **On pose : $z_A = 2 + 3i$, $z_B = 4 + 2i$ et $z_C = 3 + 5i$.**
Calculer le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, en déduire la nature du triangle ABC.

On a :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3 + 5i - (2 + 3i)}{4 + 2i - (2 + 3i)} = \frac{3 + 5i - 2 - 3i}{4 + 2i - 2 - 3i} = \frac{1 + 2i}{2 - i}$$
$$= \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i + 4i - 2}{4 + 1} = \frac{5i}{5} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

On a d'une part :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right| = 1$$

donc : $AC = AB$ $(*)$.

D'autre part, on a :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(e^{i\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2}$$

donc le triangle ABC est rectangle en A $(**)$.

Il résulte de $(*)$ et $(**)$ que le triangle **ABC est rectangle isocèle en A**.

$\boxed{D}$ On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

$\mathbb{U}$ est parfois appelé **« cercle unité »** même s'il ne s'agit pas d'un ensemble de points mais de nombres complexes.

$\boxed{P}$ **quelques propriétés**

- $z \in \mathbb{C}$ a pour module 1 $\Leftrightarrow$ il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$
- $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$
- si $z \in \mathbb{U}$ et $z' \in \mathbb{U}$, alors $z \times z' \in \mathbb{U}$ et $\frac{z}{z'} \in \mathbb{U}$

C35 **Démontrer la stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et quotient.**

Soit z et z' appartenant à $\mathbb{U}$: $|z| = 1$ et $|z'| = 1$.
On a : $|z \times z'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$.
Résumons : $|z \times z'| = 1$ ce qui montre que $z \times z' \in \mathbb{U}$.

$|z'| \neq 0$ donc $z' \neq 0$, on peut donc considérer $\frac{z}{z'}$ et on a :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{1}{1} = 1$$

Résumons : $\left|\frac{z}{z'}\right| = 1$ donc $\frac{z}{z'} \in \mathbb{U}$.

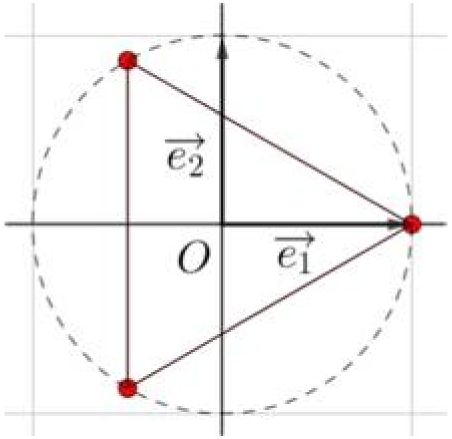
$\boxed{D}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **racine n-ième de l'unité** toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation: $z^n = 1$.

On note parfois $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

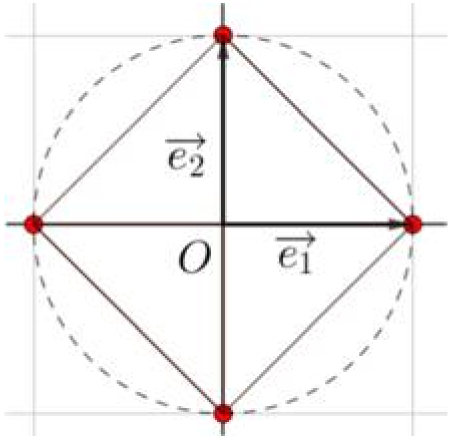
C36 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 = 1$.
Vérifier que les trois solutions s'écrivent : $e^{k\frac{2\pi}{3}i}$, $k \in \{0; 1; 2\}$.

C37 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équations : $z^4 = 1$. Vérifier que les solutions s'écrivent : $e^{k\frac{2\pi}{4}i}$ avec $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.

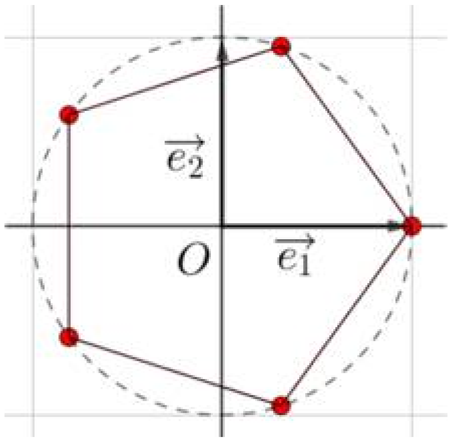
$$\boldsymbol{z^3 = 1}$$



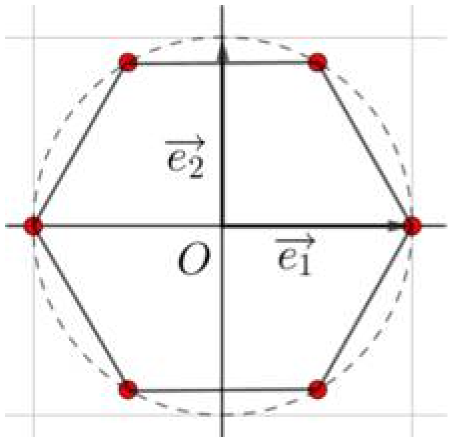
$$\boldsymbol{z^4 = 1}$$



$$\boldsymbol{z^5 = 1}$$



$$\boldsymbol{z^6 = 1}$$



$\boxed{P}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions de $z^n = 1$ sont les $\boldsymbol{n}$ nombres tous distincts $\boldsymbol{e^{k\frac{2\pi}{n}i}}$ avec k entier naturel vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

$\boxed{i}$ Lorsque $n \geqslant 3$, les points d'affixes respectives $z_k = e^{k\frac{2\pi}{n}i}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés donc le point d'affixe 1 est l'un des sommets.

$\boxed{P}$ A, B, C et D sont quatre points tous distincts, on a les équivalences :

- $(\boldsymbol{AB}) \,/\!/\, (\boldsymbol{CD}) \Leftrightarrow \dfrac{\boldsymbol{z_D - z_C}}{\boldsymbol{z_B - z_A}}$ **est un réel** non nul
- $\boldsymbol{A, B\ et\ C}$ **sont alignes** $\Leftrightarrow \dfrac{\boldsymbol{z_C - z_A}}{\boldsymbol{z_B - z_A}}$ **est un reel** non nul
- $(\boldsymbol{AB}) \perp (\boldsymbol{CD}) \Leftrightarrow \dfrac{\boldsymbol{z_D - z_C}}{\boldsymbol{z_B - z_A}}$ **est un imaginaire pur** non nul

C38 Justifier les trois points de la propriété précédente.

C39 Dans le plan complexe on considère A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 2 + 4i$, $z_B = 4 + 3i$, $z_C = 5 + i$, $z_D = 1 + 3i$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

C40 Dans le plan complexe, on considère A, B et C tels que :
$z_A = 7 + 5i$, $z_B = 4 + 4i$ et $z_C = -2 + 2i$.
Les points A, B et C sont-ils alignés ?

C41 Dans le plan complexe, on considère A, B et C tels que :
$z_A = 3 + 2i$, $z_B = 1 + 4i$ et $z_C = 6 + 5i$.

Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

Que peut-on en déduire sur la nature du triangle ABC ?

C36 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 = 1$.
Vérifier que les trois solutions s'écrivent : $e^{k\frac{2\pi}{3}i}$, $k \in \{0\,;1\,;2\}$.

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 - 1^3 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z^2+z+1 = 0$$

z^2+z+1 est de la forme az^2+bz+c avec $a=1$, $b=1$ et $c=1$, de discriminant : $\Delta = b^2-4ac = 1^2-4(1)(1) = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$.
En posant $\delta = i\sqrt{3}$, on a $\delta^2 = \Delta$ et les racines de z^2+z+1 dans $\mathbb{C}$ dont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2(1)} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2(1)} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

L'équation $z^3 = 1$ admet pour solutions :

$$\boldsymbol{z_0 = 1, z_1 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ et } \boldsymbol{z_3 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Or,

$$e^{0\frac{2\pi}{3}i} = e^{0i} = \cos(0)+i\sin(0) = 1+i(0) = 1 = \boldsymbol{z_0}$$
$$e^{1\frac{2\pi}{3}i} = e^{\frac{2\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{z_1}$$
$$e^{2\frac{2\pi}{3}i} = e^{\frac{4\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{z_2}$$

Les solutions de $z^3 = 1$ s'écrivent bien $e^{k\frac{2\pi}{3}i}$, $k \in \{0\,;1\,;2\}$.

C37 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équations : $z^4 = 1$. Vérifier que les solutions s'écrivent : $e^{k\frac{2\pi}{4}i}$ avec $k \in \{0;1;2;3\}$.

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow z^4-1 = 0 \Leftrightarrow (z^2)^2-1^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2+1)(z^2-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (z^2-i^2)(z^2-1^2) = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z+i)(z-1)(z+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow z \in \{1;i;-1;-i\}$$

Les solutions de $z^4 = 1$ sont complexes :

$$\boldsymbol{z_0 = 1, z_1 = i, z_3 = -1} \text{ et } \boldsymbol{z_4 = -i}$$

Or,

$$e^{0\times\frac{2\pi}{4}i} = e^{0i} = e^0 = 1 = \boldsymbol{z_0}$$
$$e^{1\times\frac{2\pi}{4}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0+i\times 1 = i = \boldsymbol{z_1}$$
$$e^{2\times\frac{2\pi}{4}i} = e^{\pi i} = \cos(\pi)+i\sin(\pi) = -1+i\times 0 = -1 = \boldsymbol{z_2}$$
$$e^{3\times\frac{2\pi}{4}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0+i\times -1 = -i = \boldsymbol{z_3}$$

Donc les solutions de z^4 s'écrivent bien : $\boldsymbol{e^{k\frac{2\pi}{4}i}}$ **avec $\boldsymbol{k \in \{0;1;2;3\}}$.**

$\boxed{P}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions de $z^n = 1$ sont les $\boldsymbol{n}$ nombres tous distincts $\boldsymbol{e^{k\frac{2\pi}{n}i}}$ avec k entier naturel vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

$\boxed{i}$ Lorsque $n \geqslant 3$, les points d'affixes respectives $z_k = e^{k\frac{2\pi}{n}i}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés donc le point d'affixe 1 est l'un des sommets.

$\boxed{P}$ A, B, C et D sont quatre points tous distincts, on a les équivalences :

- $(\boldsymbol{AB}) \mathbin{/\!/} (\boldsymbol{CD}) \Leftrightarrow \dfrac{\boldsymbol{z_D - z_C}}{\boldsymbol{z_B - z_A}}$ **est un réel** non nul
- $\boldsymbol{A, B}$ ***et*** $\boldsymbol{C}$ **sont alignes** $\Leftrightarrow \dfrac{\boldsymbol{z_C - z_A}}{\boldsymbol{z_B - z_A}}$ **est un reel** non nul
- $(\boldsymbol{AB}) \perp (\boldsymbol{CD}) \Leftrightarrow \dfrac{\boldsymbol{z_D - z_C}}{\boldsymbol{z_B - z_A}}$ **est un imaginaire pur** non nul

C38 Justifier les trois points de la propriété précédente.

• $(\boldsymbol{AB}) /\!/ (\boldsymbol{CD}) \Leftrightarrow \dfrac{\boldsymbol{z_D - z_C}}{\boldsymbol{z_B - z_A}}$ **est un réel** non nul

Avec les notations de la propriété précédente on a les équivalences :

$(AB) /\!/ (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 0 \ ou\ \pi\ [2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0\ ou\ \pi\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ est un réel strictement positif ou strictement négatif

$\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ est un réel non nul

• $\boldsymbol{A, B}$ ***et*** $\boldsymbol{C}$ **sont alignes** $\Leftrightarrow \dfrac{\boldsymbol{z_C - z_A}}{\boldsymbol{z_B - z_A}}$ **est un reel** non nul

Avec les notations de la propriété précédente on a les équivalences :

A, B et C alignés $\Leftrightarrow (AB) /\!/ (AC) \Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un réel non nul

• $(\boldsymbol{AB}) \perp (\boldsymbol{CD}) \Leftrightarrow \dfrac{\boldsymbol{z_D - z_C}}{\boldsymbol{z_B - z_A}}$ **est un imaginaire pur** non nul

Avec les notations de la propriété précédente on a les équivalences :

$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ ou - \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ ou - \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur non nul

C39 Dans le plan complexe on considère $\boldsymbol{A, B, C}$ et $\boldsymbol{D}$ d'affixes respectives : $\boldsymbol{z_A = 2 + 4i, z_B = 4 + 3i, z_C = 5 + i, z_D = 1 + 3i}$.
Les droites $(\boldsymbol{AB})$ et $(\boldsymbol{CD})$ sont-elles parallèles ?

On a :

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{1 + 3i - (5 + i)}{4 + 3i - (2 + 4i)} = \frac{-4 + 2i}{2 - i} = \frac{(-4 + 2i)(2 + i)}{2^2 + 1^2}$$

$$= \frac{-8 - 4i + 4i - 2}{5} = \frac{-10}{5} = -2$$

On constate que $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un réel donc (AB) et (CD) sont parallèles.

C40 Dans le plan complexe, on considère $\boldsymbol{A, B}$ et $\boldsymbol{C}$ tels que :
$\boldsymbol{z_A = 7 + 5i, z_B = 4 + 4i}$ et $\boldsymbol{z_C = -2 + 2i}$.
Les points $\boldsymbol{A, B}$ et $\boldsymbol{C}$ sont-ils alignés ?

On a :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2 + 2i - (7 + 5i)}{4 + 4i - (7 + 5i)} = \frac{-9 - 3i}{-3 - i} = \frac{3(-3 - i)}{-3 - i} = 3$$

On constate que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un réel (non nul) donc A, B et C sont alignés.

C41 Dans le plan complexe, on considère $\boldsymbol{A, B}$ et $\boldsymbol{C}$ tels que :
$\boldsymbol{z_A = 3 + 2i, z_B = 1 + 4i}$ et $\boldsymbol{z_C = 6 + 5i}$. Calculer $\boldsymbol{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}}$.

Que peut-on en déduire sur la nature du triangle $\boldsymbol{ABC}$?

On a :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{6 + 5i - (3 + 2i)}{1 + 4i - (3 + 2i)} = \frac{3 + 3i}{-2 + 2i} = \frac{(3 + 3i)(-2 - 2i)}{(-2)^2 + 2^2}$$

$$= \frac{-6 - 6i - 6i + 6}{8} = \frac{-12i}{8} = -\frac{4 \times 3i}{4 \times 2} = -\frac{3}{2}i$$

On constate que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur (non nul) donc $(AB) \perp (AB)$ autrement dit le triangle ABC est rectangle en A.

Remarque

$$\frac{AC}{AB} = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|-\frac{3}{2}i\right| = \frac{3}{2} \neq 1$$

donc $AB \neq AC$ par conséquent le triangle ABC n'est pas isocèle.

C42 Soit $x \in \mathbb{R}$, factoriser : $A(x) = \cos(x) + \cos(3x)$.

C43 On s'intéresse à la somme des racines n-ièmes de l'unité.

1. Donner sans justification les solutions de $z^2 = 1$, les solutions de $z^3 = 1$ et les solutions de $z^4 = 1$. Pour chacune de ces équations indiquer ce que vaut la somme de ses solutions.

2. **Etude du cas général**
Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Déterminer la somme des racines n-ièmes de l'unité.

C44 A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = iz + 3 + i$.
Un point confondu avec son point associé est appelé point invariant.

1. Calculer l'affixe du point E' associé à E d'affixe $z_E = 4 + i$.

2. Montrer qu'il existe un seul point invariant A dont on précisera l'affixe.

3. **a.** Soit $M \neq \mathrm{A}$, donner la forme exponentielle complexe de :
$$\frac{z' - z_{\mathrm{A}}}{z - z_{\mathrm{A}}}$$
b. Soit M un point du plan : par quelle transformation graphique passe-t-on de M à M' ?

C45 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0\ [2\pi]$.

1. Montrer que, pour tout réel θ :
$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2i$$

2. En déduire que :
$$1 + \cos x + \cos 2x = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos(x)$$
$$\sin(x) + \sin(2x) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \sin(x)$$

C46 Vérifier que, pour tout réel θ :
$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2i$$
puis démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0\ [2\pi]$:
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

C47 Soient p et q deux réels.

1. À l'aide des formules d'Euler, montrer que :
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (*)$$

2. Déduire de $(*)$ que :
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (**)$$

C42 **Soit $x \in \mathbb{R}$, factoriser : $A(x) = \cos(x) + \cos(3x)$.**

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\cos(x) + \cos(3x) \\
&= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} \\
&= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{3ix} + e^{-ix} + e^{-3ix}) \\
&= \frac{1}{2}[e^{2ix}(e^{-ix} + e^{ix}) + e^{-2ix}(e^{ix} + e^{-ix})] \\
&= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})(e^{2ix} + e^{-2ix}) \\
&= 2 \times \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \\
&= 2\cos(x)\cos(2x)
\end{aligned}$$

Finalement : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{cos}(3\boldsymbol{x}) = 2\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{x})\,\mathbf{cos}(2\boldsymbol{x})$.

C43 **On s'intéresse à la somme des racines n-ièmes des l'unité.**

1. **Solutions de $z^2 = 1$, $z^3 = 1$ et $z^4 = 1$, somme des solutions.**

   • $z^2 = 1$ a pour solutions : 1 et -1
   somme des solutions $= 1 + (-1) = \mathbf{0}$

   • $z^3 = 1$ a pour solutions : $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   somme des solutions : $1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{0}$

   • $z^4 = 1$ a pour solutions : $1, i, -1$ et $-i$.
   somme des solutions $= 1 + i - 1 - i = \mathbf{0}$

2. **Etude du cas général**
   Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
   Déterminer la somme des racines n-ièmes de l'unité.

   Les racines n-ièmes de l'unité sont : $1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{2i\frac{2\pi}{n}}, \ldots, e^{(n-1)i\frac{2\pi}{n}}$

<u>**Lemme**</u> : pour $n \geqslant 2$, $e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$.

En notant S_n la somme des racines n-ième de l'unité, on a:

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{2i\frac{2\pi}{n}} + \cdots + e^{(n-1)\frac{i2\pi}{n}} \\
&= 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2 + \cdots + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1} \\
&= 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + e^{2i\frac{2\pi}{n}} + \cdots + e^{(n-1)i\frac{2\pi}{n}} \\
&= 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2 + \cdots + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

On reconnait la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$, donc :

$$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{ni\frac{2\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}}$$
$$= \frac{1 - (\cos(2\pi) + i\sin(2\pi))}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1 - (1 + i(0))}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{0}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

Résumons : $\forall n \geqslant 2, S_n = 0$.

Pour tout $n \geqslant 2$, a somme des racines n-ièmes de l'unité vaut $\mathbf{0}$.

<u>**Preuve du Lemme**</u> :

<u>Supposons que</u> : $e^{i\frac{2\pi}{n}} = 1$ avec $n \geqslant 2$, on en déduit que :

$$\arg\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right) = \arg(1)\ [2\pi] \Leftrightarrow \frac{2\pi}{n} \equiv 0\ [2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{2\pi}{n} = k \times 2\pi$$

Ce qui s'écrit aussi : $2\pi \times \frac{1}{n} = 2\pi \times k \Leftrightarrow \frac{1}{n} = k \Leftrightarrow 1 = kn$

donc n est un diviseur positif de 1, or le seul diviseur positif de 1 est 1 donc $n = 1$ ce qui contredit $n \geqslant 2$ donc il faut <u>rejeter la supposition</u> que $e^{i\frac{2\pi}{n}} = 1$ par conséquent $e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$: le Lemme est démontré.

C44 **A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = iz + 3 + i$.**

1. Calculer l'affixe du point E' associé à E d'affixe $z_E = 4 + i$.

si $z = 4 + i$, alors :
$z' = i(4 + i) + 3 + i = 4i - 1 + 3 + i = 2 + 5i$

L'affixe de E' est donc $2 + 5i$.

2. Montrer qu'il existe un seul point invariant, noté A, dont on précisera l'affixe.

Il s'agit de résoudre l'équation $z = iz + 3 + i$.
On a les équivalences :

$$z = iz + 3 + i \Leftrightarrow z - iz = 3 + i \Leftrightarrow z(1 - i) = 3 + i$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{3 + i}{1 - i} \Leftrightarrow z = \frac{(3 + i)(1 + i)}{1^2 + 1^2} \Leftrightarrow z = \frac{3 + 3i + i - 1}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{2 + 4i}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2(1 + 2i)}{2} \Leftrightarrow z = 1 + 2i$$

Conclusion : Il existe **un et seul point invariant, $A(1 + 2i)$.**

3. a. $M \neq A$, forme exponentielle complexe de $\frac{z' - z_A}{z - z_A}$

A est un point invariant donc : $z_A = iz_A + 3 + i$.
On a :

$$\frac{z' - z_A}{z - z_A} = \frac{iz + 3 + i - (iz_A + 3 + i)}{z - z_A}$$
$$= \frac{iz + 3 + i - iz_A - 3 - i}{z - z_A} = \frac{iz - iz_A}{z - z_A} = \frac{i(z - z_A)}{z - z_A}$$
$$= i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Résumons :

$$\frac{z' - z_A}{z - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

b. M point du plan, de M à M' par quelle transformation ?

Notons r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

• **si $M \neq A$**

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \arg\left(\frac{z' - z_A}{z - z_A}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$
$$\frac{AM'}{AM} = \frac{|z' - z_A|}{|z - z_A|} = \left|\frac{z' - z_A}{z - z_A}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right| = 1$$

donc $AM' = AM$.

$$\begin{cases} (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ AM' = AM \end{cases}$$

donc M' est l'image de M par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

• **si $M = A$**

On a : $A' = A$ et $r(A) = A$, donc : $r(A) = A'$ par conséquent on passe encore de A à A' par r.

Conclusion :
Pour tout point M du plan on passe de M à M' par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

C45 **Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0 \ [2\pi]$.**

1. Montrer que tout réel θ : $e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2i$

$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}} \times \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i} \times 2i$$
$$= e^{i\frac{\theta}{2}} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2i$$

On a donc bien : $\boldsymbol{e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2i}$.

2. En déduire que :

$$\mathbf{1+\cos x+\cos 2x=\frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\times\cos(x)}$$

$$\textbf{et }\mathbf{\sin(x)+\sin(2x)=\frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\times\sin(x)}$$

Supposons $e^{ix}=1$, on a : $\cos(x)+i\sin(x)=1$, or deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire donc : $\cos(x)=1$, c'est-à-dire $x=0\ [2\pi]$ ce qui contredit la donnée $x\not\equiv 0\ [2\pi]$ de l'exercice, donc il faut rejeter la supposition $e^{ix}=1$, par conséquent : $e^{ix}\neq 1$.

On a :

$$\begin{aligned}&1+\cos(x)+\cos(2x)+i(\sin(x)+\sin(2x))\\&=1+i0+\cos(x)+i\sin(x)+\cos(2x)+i\sin(2x)\\&=1+e^{ix}+e^{2ix}=1+e^{ix}+(e^{ix})^2=\frac{1-(e^{ix})^3}{1-e^{ix}}\\&=\frac{1-e^{3ix}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{i3x}-1}{e^{ix}-1}\end{aligned}$$

Or, pour tout réel θ, $e^{i\theta}-1=e^{i\frac{\theta}{2}}\times\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\times 2i$, donc :

$$\frac{e^{i3x}-1}{e^{ix}-1}=\frac{e^{i\frac{3x}{2}}\times\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\times 2i}{e^{i\frac{x}{2}}\times\sin\left(\frac{x}{2}\right)\times 2i}=e^{i\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)}\times\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=e^{ix}\times\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=(\cos(x)+i\sin(x))\times\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos(x)+i\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\times\sin(x)$$

Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, donc :

$$\mathbf{1+\cos x+\cos 2x=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\times\cos(x)}$$

$$\textbf{et }\mathbf{\sin(x)+\sin(2x)=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\times\sin(x)}$$

C46 Vérifier que, pour tout réel $\boldsymbol{\theta}$:

$$\boldsymbol{e^{i\theta}-1=e^{i\frac{\theta}{2}}\times\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\times 2i}$$

puis démontrer que, pour tout $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$ tel que $\boldsymbol{x\not\equiv 0\ [2\pi]}$:

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

Soit $\theta\in\mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta}-1=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{i\frac{\theta}{2}}\times\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}\times 2i$$

$$=e^{i\frac{\theta}{2}}\times\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\times 2i$$

On a donc bien : $\forall\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{e^{i\theta}-1=e^{i\frac{\theta}{2}}\times\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\times 2i}$.

On a :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)+i\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=\sum_{k=0}^{n}(\cos(kx)+i\sin(kx))$$
$$=\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^{k}$$

Or, la formule de la somme des premiers termes d'une suite géométrique donne :

$$\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^{k}=\frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-(\cos x+i\sin x)}$$
$$=\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}=\frac{2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)e^{i\frac{nx}{2}}e^{i\frac{x}{2}}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}}=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)e^{i\frac{nx}{2}}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right)+i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{nx}{2}\right)+i\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

<u>Résumons</u> :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)+i\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{nx}{2}\right)+i\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, donc :

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\times\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\times\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

C47 **Soient p et q deux réels.**

1. À l'aide des formules d'Euler, montrer que :

$$\boldsymbol{\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}\quad(*)$$

2. Déduire de $(*)$ que :

$$\boldsymbol{\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}\quad(**)$$

1. Soient p et q deux réels, on a :

$$\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$=\frac{e^{i\frac{p+q}{2}}+e^{-i\frac{p+q}{2}}}{2}\times\frac{e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}}{2}$$
$$=\frac{1}{4}\left(e^{i\frac{p+q}{2}}+e^{-i\frac{p+q}{2}}\right)\left(e^{i\frac{p-q}{2}}+e^{-i\frac{p-q}{2}}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(e^{ip}+e^{iq}+e^{-iq}+e^{-ip}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{ip} + e^{-ip} + e^{iq} + e^{-iq}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ip} + e^{-ip}}{2} + \frac{e^{iq} + e^{-iq}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos(p) + \cos(q)\right)$$

Donc :

$$\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(p) + \cos(q)\right)$$

autrement dit :

$$\boldsymbol{\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

On peut aussi partir de $cos(p) + cos(q)$ et utiliser le principe de l'angle moitié.

2. On a :

$$\sin(p) + \sin(q)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - p\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - q\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - p + \frac{\pi}{2} - q}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - p - \left(\frac{\pi}{2} - q\right)}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi - (p+q)}{2}\right)\cos\left(\frac{-p+q}{2}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p+q}{2}\right)\cos\left(-\frac{p-q}{2}\right)$$
$$= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$