Nombres complexes I

$\boxed{P}$ On construit un ensemble $\mathbb{C}$ contenant les réels :

- les éléments de $\mathbb{C}$ s'appellent **nombres complexes** ou **complexes**
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une soustraction qui « prolongent » l'addition et la multiplication sur les réels et qui possède les mêmes propriétés algébriques : associativité, distributivité …
- il existe un complexe noté $\boldsymbol{i}$ dont le carré est (-1) : $\boldsymbol{i^2 = -1}$
- tout complexe z s'écrit de manière unique sous forme $z = a + ib$ où a et b sont des réels, c'est la **forme algébrique**, le réel a est la **partie réelle** de z, le réel b est la **partie imaginaire** de z, on écrit : $a = \mathbf{Re}(z)$ et $b = \mathbf{Im}(z)$

attention : la partie imaginaire est **un réel** !

- deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont des parties réelles égales et des parties imaginaires égales :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

C01 Donner la partie réelle et la partie imaginaire de : $5 - 4i$, $9i$ et 6.

$\boxed{i}$ Dans $\mathbb{C}$ les identités remarquables, la formule du binôme de Newton, la règle du produit nul restent valables mais il **n'y pas de relation d'ordre** dans $\mathbb{C}$.

$\boxed{P}$ Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

- $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$
- $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$
- $(z + z')(z - z') = z^2 - z'^2$
- $z \times z' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0$

C02 Donner la forme algébrique de chacun des nombres :
$z_1 = (5 + 2i) + (-1 + 7i)$ $\quad z_2 = (3 + 5i)(1 + 4i)$ $\quad z_3 = (3 + 2i)^2$
Vérifier z_2 et z_3 à l'aide de la calculatrice.

C03 Calculer i^3 puis donner la forme algébrique de $(2 + i)^3$.

$\boxed{i}$ Tout réel a est « identifié » à $a + 0i$: il n'y a pas de raison de les distinguer, cela n'apporterait rien, en particulier le réel nul $0_{\mathbb{R}}$ est identifié au complexe nul $0_{\mathbb{C}}$ avec $0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}i$ et on utilise simplement la notation 0, ainsi : $0 = 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}i$.

C04 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(2z - 3 + i)(iz - 5) = 0$.
On donnera les solutions sous forme algébrique.

C05 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^2 + 9 = 0$ et $z^4 - 1 = 0$.

$\boxed{D}$ Un complexe dont la partie réelle est $0_{\mathbb{R}}$ est un **imaginaire pur** : un complexe est un imaginaire pur lorsqu'il peut s'écrire ib où $b \in \mathbb{R}$.
$\boxed{i}$ Un **réel** est un complexe de ***partie imaginaire*** nulle, et qu'un ***imaginaire pur*** est un complexe de **partie réelle** nulle :
z est un imaginaire pur $\mathrm{Re}(z) = 0$, z est un réel $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(z) = 0$
Le seul nombre qui soit simultanément réel et imaginaire pur est 0.

C06 Donner la forme algébrique de $(5 - i)^2$. En déduire les nombres complexes z tels que : $z^2 = 24 - 10i$.

C07 Déterminer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $(x + yi)^2 = -5 + 12i$.

C08 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = 45 - 28i$.

C09 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = -24 + 10i$.

$\boxed{D}$ Le **conjugué** d'un complexe z, noté $\bar{z}$, a la même partie réelle que z et une partie imaginaire opposée à celle de z.
Ainsi :

- si $z = x + iy$ avec x et y réels, alors $\overline{z} = x - iy$
- si $z = x - iy$ avec x et y réels, alors $\overline{z} = x + iy$

C10 Donner la forme algébrique de :

$$z = \frac{1}{3 + 4i} \quad \text{et de} \quad z' = \frac{1 + 2i}{5 + 12i}$$

$\boxed{P}$ On construit un ensemble $\mathbb{C}$ contenant les réels :

• les éléments de $\mathbb{C}$ s'appellent **nombres complexes** ou **complexes**

• $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une soustraction qui « prolongent » l'addition et la multiplication sur les réels et qui possède les mêmes propriétés algébriques : associativité, distributivité …

• il existe un complexe noté $\boldsymbol{i}$ dont le carré est (-1) : $\boldsymbol{i^2 = -1}$

• tout complexe z s'écrit de manière unique sous forme $z = a + ib$ où a et b sont des réels, c'est la **forme algébrique**, le réel a est la **partie réelle** de z, le réel b est la **partie imaginaire** de z, on écrit :
$a = \mathbf{Re}(z)$ et $b = \mathbf{Im}(z)$
attention : la partie imaginaire est **un réel** !

• deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont des parties réelles égales et des parties imaginaires égales :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

C01 Donner la partie réelle et la partie imaginaire : $\boldsymbol{5 - 4i}$, $\boldsymbol{9i}$ et $\boldsymbol{6}$.

• $5 - 4i = 5 + (-4)i$ donc $\mathbf{Re}(\boldsymbol{5 - 4i}) = \mathbf{5}$ et $\mathbf{Im}(\boldsymbol{5 - 4i}) = \mathbf{-4}$
• $9i = 0 + 9i$ donc $\mathbf{Re}(\boldsymbol{9i}) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{Im}(\boldsymbol{9i}) = \mathbf{9}$
• $6 = 6 + 0i$ donc $\mathbf{Re}(\mathbf{6}) = \mathbf{6}$ et $\mathbf{Im}(\mathbf{6}) = \mathbf{0}$

$\boxed{i}$ Dans $\mathbb{C}$ les identités remarquables, la formule du binôme de Newton, la règle du produit nul restent valables mais il **n'y pas de relation d'ordre** dans $\mathbb{C}$.

$\boxed{P}$ Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :
• $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$ • $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$
• $(z + z')(z - z') = z^2 - z'^2$ • $z \times z' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \ ou \ z' = 0$

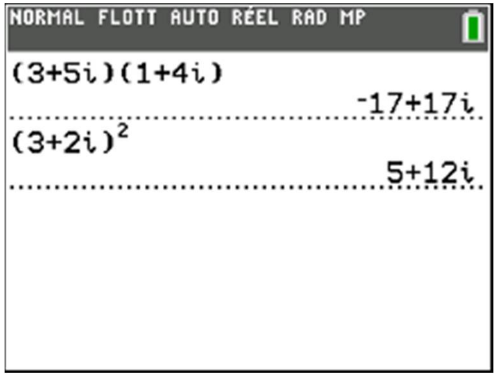
C02 Donner la forme algébrique de chacun des nombres :
$\boldsymbol{z_1 = (5 + 2i) + (-1 + 7i)}$, $\boldsymbol{z_2 = (3 + 5i)(1 + 4i)}$
et $\boldsymbol{z_3 = (3 + 2i)^2}$, vérifier $\boldsymbol{z_2}$ et $\boldsymbol{z_3}$ à l'aide de la calculatrice.

• $z_1 = (5 + 2i) + (-1 + 7i) = 5 + 2i - 1 + 7i = 5 - 1 + 2i + 7i$
$= \boldsymbol{4 + 9i}$

• $z_2 = (3 + 5i)(1 + 4i) = 3 + 12i + 5i + 20i^2$
$= 3 + 17i + 20(-1) \ = \boldsymbol{-17 + 17i}$

• $z_3 = (3 + 2i)^2 = (3 + 2i)(3 + 2i) = 9 + 6i + 6i + 4i^2$
$= 9 + 12i - 4 = \boldsymbol{5 + 12i}$

Autre méthode
$z_3 = (3 + 2i)^2 = (3)^2 + 2(3)(2i) + (2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2$
$= 9 - 4 + 12i \ = 5 + 12i$



C03 Calculer $\boldsymbol{i^3}$ puis donner la forme algébrique de $\boldsymbol{(2 + i)^3}$.

• $i^3 = i^2 \times i = (-1) \times i = \boldsymbol{-i}$
• Pour tous nombres complexes z et z' on a :

$$(z + z') = z^3 + 3z^2z' + 3zz'^2 + z'^3$$

Donc :
$(2 + i)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times i + 3 \times 2 \times i^2 + i^3$
$= 8 + 12i + 6 \times (-1) - i = \boldsymbol{2 + 11i}$

$\boxed{i}$ Tout réel a est « identifié » à $a + 0i$: il n'y a pas de raison de les distinguer, cela n'apporterait rien, en particulier le réel nul $0_{\mathbb{R}}$ est identifié au complexe nul $0_{\mathbb{C}}$ avec $0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}\mathrm{i}$ et on utilise simplement la notation 0, ainsi : $0 = 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}i$.

C04 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(2z-3+i)(iz-5)=0$.

On a les équivalences :

$$(2z-3+i)(iz-5)=0 \Leftrightarrow 2z-3+i=0 \;\; ou \;\; iz-5=0$$
$$\Leftrightarrow 2z=3-i \;\; ou \;\; iz=5 \Leftrightarrow z=\frac{3-i}{2} \;\; ou \;\; z=\frac{5}{i}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \; ou \; z=\frac{5i}{i^2} \Leftrightarrow z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \; ou \; z=\frac{5i}{-1}$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \; ou \; z=-5i$$

On a donc : $S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{i}\,;\,-\mathbf{5}\boldsymbol{i}\right\}$.

C05 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^2+9=0$ et $z^4-1=0$.

• $z^2+9=0 \Leftrightarrow z^2-(-9)=0 \Leftrightarrow z^2-(3i)^2=0$
$\Leftrightarrow (z+3i)(z-3i)=0 \Leftrightarrow z+3i=0 \; ou \; z-3i=0$
$\Leftrightarrow z=-3i \; ou \; z=3i$
$S_{\mathbb{C}}=\{-\mathbf{3}\boldsymbol{i}\,;\,\mathbf{3}\boldsymbol{i}\}$

• $z^4-1=0 \Leftrightarrow (z^2)^2-1^2=0 \Leftrightarrow (z^2+1)(z^2-1)=0$
$\Leftrightarrow z^2+1=0 \; ou \; z^2-1=0$
On a d'une part :
$z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2-(-1)=0 \Leftrightarrow z^2-i^2=0 \Leftrightarrow (z+i)(z-i)=0$
$\Leftrightarrow z+i=0 \; ou \; z-i=0 \Leftrightarrow z=-i \;\; ou \;\; z=i$.
et d'autre part :
$z^2-1=0 \Leftrightarrow z^2-1^2=0 \Leftrightarrow (z+1)(z-1)=0$
$\Leftrightarrow z+1=0 \; ou \; z-1=0 \Leftrightarrow z=-1 \; ou \;\; z=1$
Finalement : $S_{\mathbb{C}}=\{-\boldsymbol{i};\boldsymbol{i};\,-\mathbf{1};\mathbf{1}\}$.

$\boxed{D}$ Un complexe dont la partie réelle est $0_{\mathbb{R}}$ est un **imaginaire pur** :
un complexe est un imaginaire pur lorsqu'il peut s'écrire ib où $b\in\mathbb{R}$.
$\boxed{i}$ Un **réel** est un complexe de ***partie imaginaire*** nulle,
et qu'un ***imaginaire pur*** est un complexe de **partie réelle** nulle :
z est un imaginaire pur $\mathrm{Re}(z)=0$, z est un réel $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(z)=0$
Le seul nombre qui soit simultanément réel et imaginaire pur est 0.

C06 Forme algébrique de $(5-i)^2$, résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2=24-10i$.

On a : $(5-i)^2=5^2-2(5)(i)+i^2=25-10i+(-1)=24-10i$
donc :
$z^2=24-10i \Leftrightarrow z^2-(24-10i)=0 \Leftrightarrow z^2-(5-i)^2=0$
$\Leftrightarrow [z+(5-i)][z-(5-i)]=0 \Leftrightarrow z+5-i=0 \;\; ou \;\; z-(5-i)=0$
$\Leftrightarrow z=-5+i \;\; ou \;\; z=5-i$

$\boldsymbol{S_{\mathbb{C}}}=\{-\mathbf{5}+\,;\mathbf{5}-\boldsymbol{i}\}$

C07 Déterminer $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que : $(x+yi)^2=-5+12i$.

[méthode astucieuse]

$$-5+12i=4-9+12i=2^2+2(2)(3i)+(3i)^2=(2+3i)^2$$

Donc :

$$(x+yi)^2=-5+12i$$
$$\Leftrightarrow (x+yi)^2=(2+3i)^2$$
$$\Leftrightarrow (x+yi)^2-(2+3i)^2=0$$
$$\Leftrightarrow [(x+yi)+(2+3i)][(x+yi)-(2+3i)]=0$$
$$\Leftrightarrow x+yi+2+3i=0 \;\; ou \;\; x+yi-(2+3i)=0$$
$$\Leftrightarrow x+yi=-2-3i \;\; ou \;\; x+yi=2+3i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases} ou \;\; \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

Conclusion

Il y a deux couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $(x+yi)^2=-5+12i$:
$(-2,-3)$ et $(2,3)$.

Autre méthode

$(x+yi)^2=-5+12i \Leftrightarrow x^2+2xyi+(yi)^2=-5+12i$
$\Leftrightarrow x^2+2xyi+y^2i^2=-5+12i \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=-5+12i$
Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^2 - \left(\dfrac{6}{x}\right)^2 = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^2 - \dfrac{36}{x^2} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ \dfrac{x^4 - 36}{x^2} = -55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^4 - 36 = -55x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6}{x} \\ x^4 + 55x^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

En posant $X = x^2$, $x^4 + 55x^2 - 36 = 0$ s'écrit $X^2 + 5X - 36 = 0$, de discriminat :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(1)(-36) = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

$\Delta > 0$ donc $^2 + 5X - 36$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 13}{2(1)} = \frac{-18}{2} = -9$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 13}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4$$

Donc $X = -9$ ou $X = 4$.

• $X = -9$, or $X = x^2$, donc $x^2 = -9$, or le carré d'un réel est un réel positif ou nul, donc l'équation $x^2 = -9$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

• $X = 4$, or $X = x^2$ donc $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \;\; ou \;\; x = 2$:

– si $x = -2$

$$y = \frac{6}{x} = \frac{6}{-2} = -3$$

– si $x = 2$

$$y = \frac{6}{x} = \frac{6}{2} = 3$$

<u>Conclusion</u>

Il y a deux couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x + yi)^2 = -5 + 12i$: $(-2, -3)$ et $(2, 3)$.

$\boxed{i}$ On en déduit que l'équation $z^2 = -5 + 12i$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $-2 - 3i$ et $2 + 3i$.

C08 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = 45 - 28i$.

<u>Méthode 1</u>

$$45 - 28i = 49 - 45 - 28i = 7^2 - 2(7)(2i) + (2i)^2 = (7 - 2i)^2$$

On a donc les équivalences :

$$z^2 = 45 - 28i \Leftrightarrow z^2 = (7 - 2i)^2 \Leftrightarrow z^2 - (7 - 2i)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow [z + (7 - 2i)] \times [z - (7 - 2i)]$$
$$\Leftrightarrow z + 7 - 2i = 0 \;\; ou \;\; z - (7 - 2i) = 0$$
$$\Leftrightarrow z = -7 + 2i \;\; ou \;\; z = 7 - 2i$$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \{-7 + 2i\,; 7 - 2i\}$.

<u>Méthode 2</u>

$$(x + yi)^2 = 45 - 28i \Leftrightarrow x^2 + 2xyi + (yi)^2 = 45 - 28i$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2xyi + y^2 i^2 = 45 - 28i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 45 - 28i$$

Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 45 \\ 2xy = -28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = -14 \\ x^2 - y^2 = 45 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{14}{x} \\ x^2 - \left(-\dfrac{14}{x}\right)^2 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{14}{x} \\ x^2 - \dfrac{196}{x^2} = 45 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{14}{x} \\ \dfrac{x^4 - 196}{x^2} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{14}{x} \\ x^4 - 196 = 45x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{14}{x} \\ x^4 + 45x^2 - 196 = 0 \end{cases}$$

En posant $X = x^2$, $x^4 + 45x^2 - 196 = 0$ s'écrit

$$X^2 + 45X - 196 = 0$$

de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-45)^2 - 4(1)(-196) = 2\,809 = 53^2$$

$\Delta > 0$ donc l'équation en X admet deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+45-53}{2(1)} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+45+53}{2(1)} = \frac{98}{2} = 49$$

Donc $X = -4$ ou $X = 49$.

• $X = -4$ s'écrit $x^2 = -9$ (impossible : le carré d'un réel est un réel positif ou nul)

• $X = 49$, s'écrit $x^2 = 49 \Leftrightarrow x = -7 \ ou \ x = 7$.

$-$ si $x = -7$

$$y = -\frac{14}{x} = -\frac{14}{-7} = +2$$

donc : $-7 + 2i$ est une solution.

$-$ si $x = 7$

$$y = -\frac{14}{x} = -\frac{14}{7} = -2$$

donc : $7 - 2i$ est une solution.

Conclusion

L'équation $z^2 = 45 - 28i$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $-7 + 2i$ et $7 - 2i$.

C09 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = -24 + 10i$.

Méthode 1

$$-24 + 10i = 25 - 1 - 10i = 5^2 - 2(5)(i) + i^2 = (5 - i)^2$$

On a :

$$z^2 = -24 + 10i \Leftrightarrow z^2 = (5-i)^2 \Leftrightarrow z^2 - (5-i)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [z + (5-i)][z - (5-i)] = 0$$

$$\Leftrightarrow z + 5 - i = 0 \ ou \ z - (5-i) = 0 \Leftrightarrow z = -5 + i \ ou \ z = 5 - i$$

Méthode 2

On pose $z = x + iy$, x et y réels. [Non rédigée]

$\boxed{D}$ Le **conjugué** d'un complexe z, noté $\bar{z}$, a la même partie réelle que z et une partie imaginaire opposée à celle de z.

Ainsi :

• si $z = x + iy$ avec x et y réels, alors $\overline{z} = x - iy$

• si $z = x - iy$ avec x et y réels, alors $\overline{z} = x + iy$

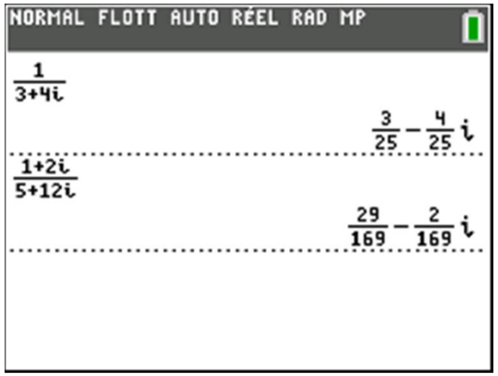
C10 Donner la forme algébrique de : $z = \frac{1}{3+4i}$ et $z' = \frac{1+2i}{5+12i}$.

$$z = \frac{1}{3+4i} = \frac{1(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i}{3^2-(4i)^2} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3-4i}{25}$$

$$= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{25}} - \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{25}}\boldsymbol{i}$$

$$z' = \frac{1+2i}{5+12i} = \frac{(1+2i)(5-12i)}{(5+12i)(5-12i)} = \frac{5-12i+10i-24i^2}{5^2-(12i)^2}$$

$$= \frac{5-2i+24}{25+144} = \frac{29-2i}{169} = \frac{\mathbf{29}}{\mathbf{169}} - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{169}}\boldsymbol{i}$$



$\boxed{D}$ quelques définitions

• l'inverse de $z \neq 0$ est le complexe noté $\dfrac{1}{z}$ tel que :

$$z \times \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times z = 1$$

• le quotient de $z \in \mathbb{C}$ par $z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est le complexe noté $\dfrac{z}{z'}$ égal au produit de z par l'inverse de z' :

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = \frac{1}{z'} \times z$$

$\boxed{\mathrm{P}}$ Equation du second degré

Soient $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, b $\in \mathbb{C}$, c $\in \mathbb{C}$, on note (E) l'équation du second degré d'inconnue z $\in \mathbb{C}$: $az^2 + bz + c = 0$.Le discriminant de (E) est le **complexe** $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit δ un complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.
Les solutions, distinctes ou non, de (E) sont les complexes :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

Cas particulier : le scoefficients sont réels
Si a, b, c sont tous réels, $a \neq 0$, alors Δ est un réel et on peut parler de son signe :

• si $\Delta > 0$ alors (E) admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

• si $\Delta = 0$ alors (E) admet une seule solution, le réel :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

• si $\Delta < 0$ alors (E) admet deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

C11 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 4z + 5 = 0$.

C12 $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - 4z^2 + 14z - 20$

1. Montrer qu'il existe deux réels b et c, à préciser, tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-2)(z^2 + bz + c)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

C13 Démontrer la propriété précédent sur les solutions de (E).

C14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + iz + 2 = 0$.

C15 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + z + 1 - i = 0$.

$\boxed{D}$ Quelques définitions

• soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que P est un **polynôme de degré n à coefficients complexes**, ou plus simplement un **polynôme de degré n**, lorsqu'il existe $(n+1)$ complexes $a_0, a_1, \dots, a_n$ avec $\boldsymbol{a_n \neq 0}$ tels que :
$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, on écrit alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

• la **fonction nulle** $z \mapsto 0$ s'appelle aussi **polynôme nul** : c'est le seul polynôme qui n'a pas de degré

• soit P un polynôme :

P est un **polynôme non nul** $\overset{déf}{\Leftrightarrow}$ P est différent du polynôme nul
$\Leftrightarrow$ il existe $z \in \mathbb{C}, P(z) \neq 0$

• une **fonction constante** s'appelle aussi **polynôme constant** : c'est soit le polynôme nul lorsque cette constante est zéro, soit un polynôme de degré 0 lorsque cette constante est différente de zéro.

$\boxed{P}$ Quelques propriétés

• deux polynômes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même degré et ont m^mes coefficients

• soeint P et Q deux polynômes non nuls, alors :

$$\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$$

C11 **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 4z + 5 = 0$.**

L'équation $z^2 + 4z + 5 = 0$ est de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 4$ et $c = 5$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4$$

$\Delta < 0$ donc il y adeux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-4 - i\sqrt{4}}{2(1)} = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$$

et $z_2 = \overline{z_1} = -2 + i$.

Remarque

$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-4 + i\sqrt{4}}{2(1)} = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i$$

On peut aussi appliquer la formule générale

$\Delta = -4 = (2i)^2$ donc $\delta = 2i$ convient, les deux solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-4 - 2i}{2(1)} = \frac{2(-2 - i)}{2} = -2 - i$$

$$z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-4 + 2i}{2} = \frac{2(-2 + i)}{2} = -2 + i$$

C12 $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - 4z^2 + 14z - 20$

1. **Montrer qu'il existe deux réels b et c, à préciser, tels que :**

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - 2)(z^2 + bz + c)$$

Développons :

$$(z - 2)(z^2 + bz + c) = z^3 + z^2(b - 2) + z(c - 2b) - 2c$$

Par identification avec $z^3 - 4z^2 + 14z - 20$ on obtient :

$$\begin{cases} b - 2 = -4 \\ c - 2b = 14 \\ -2c = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 14 + 2(-2) \\ c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 10 \\ c = 10 \end{cases}$$

Il existe donc de tels nombres b et c, à savoir $b = -2$ et $c = 10$ et on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - 2)(z^2 - 2z + 10)$$

Autre méthode Posons la division euclidienne des polynômes :

$$\begin{array}{rrrr|l} z^3 & -4z^2 & +14z & -20 & z - 2 \\ \cline{5-5} -z^3 & +2z^2 & \downarrow & \downarrow & z^2 - 2z + 10 \\ \cline{1-2} & -2z^2 & 14z & & \\ & +2z^2 & -4z & & \\ \cline{2-3} & & 10z & -20 & \\ & & -10z & +20 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Donc, $\forall z \in \mathbb{C}, z^3 - 4z^2 + 14z - 20 = (z - 2)(z^2 - 2z + 10)$.

2. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.**

L'équation $P(z) = 0$ s'écrit $(z - 2)(z^2 - 2z + 10) = 0$

ce qui est équivalent à : $z - 2 = 0$ ou $z^2 - 2z + 10 = 0$.

• $z - 2 = 0 \Leftrightarrow z = 2$

• $z^2 - 2z + 10 = 0$

Cette équation est de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -2$ et $c = 10$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(10) = 4 - 40 = -36 = (6i)^2$$

$\Delta = \delta^2$ avec $\delta = 6i$

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{+2 - 6i}{2(1)} = \frac{2(1 - 3i)}{2} = 1 - 3i$$

$$z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{+2 + 6i}{2(1)} = \frac{2(1 + 3i)}{2} = 1 + 3i$$

L'équation $P(z)$ admet pour solutions dans $\mathbb{C}$: $2, 1 - 3i, 1 + 3i$.

Remarque pour $z^2 - 2z + 10 = 0$

$\Delta < 0$ donc il y adeux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{+2 - i\sqrt{36}}{2(1)} = \frac{2 - 6i}{2} = 1 - 3i$$

et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + 3i$.

C13 Démontrer la propriété précédent sur les solutions de (E).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
&az^2+bz+c\\
&=a\left[z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right]\\
&=a\left[z^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]\\
&=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]\\
&=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\
&=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

En notant δ un complexe telque $\delta^2=\Delta$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&az^2+bz+c\\
&=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right]\\
&=a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Donc l'équation $az^2+bz+c=0$, $a\neq 0$, s'écrit :

$$\begin{aligned}
&a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)=0 \text{ avec } a\neq 0\\
&\Leftrightarrow z=-\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\quad ou\quad z=-\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\\
&\Leftrightarrow z=\frac{-b-\delta}{2a}\quad ou\quad z=\frac{-b+\delta}{2a}
\end{aligned}$$

Les solutions de $az^2+bz+c=0, a\neq 0$ sont donc :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a}\ \text{ et }\ z_2=\frac{-b+\delta}{2a}\quad (*)$$

<u>Lien avec le cas où les coefficients sont des réels</u>

Si a, b et c sont réels, $a\neq 0$, alor $\Delta=b^2-4ac$ est réel donc on peut parler de son signe et trois cas vont se présenter :

- si $\Delta>0$, on a : $\Delta=\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ donc $\delta=\sqrt{\Delta}$ convient et les formules $(*)$ deviennent :

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ \text{ et }\ z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta=0$, on a : $\Delta=0=(0)^2$ donc $\delta=0$ convient et les formules $(*)$ deviennent :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{-b-0}{2a}=\frac{-b}{2a}\ \text{ et }\ z_2=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{-b+0}{2a}=\frac{-b}{2a}$$

donc l'équation (E) admet une solution réelle double :

$$z_0=\frac{-b}{2a}$$

- si $\Delta<0$, alors : $\Delta=-|\Delta|=i^2\times\left(\sqrt{|\Delta|}\right)^2=\left(i\sqrt{|\Delta|}\right)^2$ donc $\delta=i\sqrt{|\Delta|}$ convient el les formules $(*)$ deviennent :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\ \text{ et }\ z_2=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

C14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+iz+2=0$.

L'équation $z^2+iz+2=0$ est de la forme $az^2+bz+c=0$ avec $a=1$, $b=i$ et $c=2$, de discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=i^2-4(1)(2)=-1-8=-9=(3i)^2$$

On a donc $\Delta=\delta^2$ avec $\delta=3i$.

z^2+iz+2 ademt deux racines complexes distinctes :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{-i-3i}{2(1)}=\frac{-4i}{2}=\boldsymbol{-2i}$$

$$z_2=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{-i+3i}{2(1)}=\frac{2i}{2}=\boldsymbol{i}$$

<u>Conclusion</u> :

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$ sont : $-2i$ et i.

C15 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\boldsymbol{z^2 + z + 1 - i = 0}$.

L'équation $z^2 + z + 1 - i = 0$ est de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1 - i$, de discriminant :

$$\Delta = 1 - 4(1)(1 - i) = 1 - 4 + 4i = 1^2 + 2(1)(2i) + (2i)^2$$
$$= (1 + 2i)^2$$

En posant $\delta = 1 + 2i$, on a : $\delta^2 = \Delta$.

Les racines de $z^2 + z + 1 - i$ sont :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{-1 - (1 + 2i)}{2(1)} = \frac{-2 - 2i}{2} = \frac{2(-1 - i)}{2} = \boldsymbol{-1 - i}$$
$$z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-1 + (1 + 2i)}{2(1)} = \frac{2i}{2} = \boldsymbol{i}$$

<u>Conclusion</u>

Les solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$ sont : $\boldsymbol{-1 - i}$ et $\boldsymbol{i}$.

$\boxed{D}$ Un polynôme non constant est **factorisable par un polnôme Q** non constant lorsqu'il existe un polynôme S non constant tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = Q(z) \times S(z)$.

$\boxed{i}$ • mettre en facteur une constante n'est donc pas considéré comme factorisation
• si $P = Q \times S$, alors $\deg(S) = \deg(P) - \deg(Q)$

$\boxed{P}$ z et a sont deux complexes, n un entier naturel non nul, on a :
$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1}a^0 + \cdots + z^{n-1-k}a^k + \cdots + z^0a^{n-1})$$

C18 Justifier la formule générale de factorisation de $z^n - a^n$.

$\boxed{D}$ Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors :
$$\boldsymbol{\alpha} \text{ est une racine de } P \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} P(\boldsymbol{\alpha}) = 0$$
Autrement dit : une racine d'un polynôme est un complexe annulant ce polynôme.

$\boxed{P}$ Soit P un polynôme non constant et $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}$, on a les équivalences : il existe un polynôme Q différent du polynôme nul tel que
$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - \boldsymbol{\alpha})Q(z) \Leftrightarrow P(\boldsymbol{\alpha}) = 0$

C19 Démontrer la propriété précédente.

C20 $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - 2iz^2 + 25z - 50i$
• vérifier que $2i$ est une racine de P puis factoriser $P(z)$
• résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

C21 $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - (2+i)z^2 - 2z - 2 - 4i$
• calculer $P(-i)$, en déduire une factorisation de $P(z)$
• résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

$\boxed{P}$ Un polynôme de degré $n \geqslant 1$ admet au plus n racines distinctes.

C22 Démontrer la popriété précédente.

$\boxed{D}$ Soit P un polynôme de degré n à coefficients complexes et α un nombre complexe, on dit que :

• $\boldsymbol{\alpha}$ est une **racine simple** de P lorsque $P(z)$ est factorisable par $(z - \boldsymbol{\alpha})$ mais pas par $(z - \boldsymbol{\alpha})^2$

• $\boldsymbol{\alpha}$ est une **racine double** de P lorsque $P(z)$ est factorisable par $(z - \boldsymbol{\alpha})^2$ mais pas par $(z - \boldsymbol{\alpha})^3$

• $\boldsymbol{\alpha}$ est une **racine de multiplicité $\boldsymbol{k}$** $\in \mathbb{N}^*$ de P lorsque $P(z)$ est factorisable par $(z - \boldsymbol{\alpha})^k$ mais pas par $(z - \boldsymbol{\alpha})^{k+1}$

$\boxed{P}$ $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = az^2 + bz + c$.
On note z_1 et z_2 les racines complexes de P, distinctes ou non, alors :
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$
$\boxed{i}$ Par convention on parle de la somme « des » racines et du produit «des» racines de P que z_1 et z_2 soient distinctes ou non.

C23 Démontrer les formules précédentes.

C24 $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ avec $a_3 \neq 0$
On admet qu'il existe exactement trois racines comptées avec leur ordre de multiplicité, notées z_1, z_2 et z_3. Montrer que :
$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_2}{a_3} \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 \times z_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

$\boxed{P}$ (admis) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un polynôme P de degré n à coefficients complexes, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$P(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 \text{ avec } a_n \neq 0$$
• la **somme** des racines comptées avec leur ordre de multiplicité est égale à : $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
• le **produit** des racines comptées avec leur ordre de multiplicité est égal à : $(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}$.

C18 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition P_n :

$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1}a^0 + \cdots + z^{n-1-k}a^k + \cdots + z^0 a^{n-1})$$

• <u>initialisation</u>

$z^1 - a^1 = z - a = (z-a)(z^0a^0)$ donc P_0 est vraie

• <u>hérédité</u>

Supposons vraie P_n pour un certain entier naturel n et démontrons que P_{n+1} est vraie.

$z^{n+1} - a^{n+1}$
$= zz^n - za^n + za^n - aa^n$
$= z(z^n - a^n) + (z-a)a^n$
$= z(z-a)(z^{n-1}a^0 + \cdots + z^{n-1-k}a^k + \cdots + z^0a^{n-1}) + (z-a)a^n$
$= (z-a)(z^n a^0 + \cdots + z^{n-k}a^k + \cdots + za^{n-1} + a^n)$

On a :

$z^{n+1} - a^{n+1} = (z-a)(z^n a^0 + \cdots + z^{n-k}a^k + \cdots + za^{n-1} + a^n)$

autrement dit P_{n+1} est vraie.

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie, autrement dit :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, z^n - a^n$
$\quad = (z-a)(z^{n-1}a^0 + \cdots + z^{n-1-k}a^k + \cdots + z^0a^{n-1})$

C19 Démontrer la propriété précédente.

Soit P un poulynôme de degré $n \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ telque $P(\alpha) = 0$

$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ avec $a_0 \neq 0$

On a :

$$\begin{aligned}
&P(z)\\
&= P(z) - 0\\
&= P(z) - P(a)\\
&= a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\\
&\qquad - (a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0)\\
&= a_n(z^n - \alpha^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(z-\alpha)
\end{aligned}$$

Or, on a montré précédemment pour tout $i \in \{1; \ldots; n\}$, $z^i - \alpha^i$ est factorisable par $(z-\alpha)$ donc il existe un polynôme S_i tel que, $\forall z \in \mathbb{C} : z^i - a^i = (z-a)S_i(z)$.

Donc :

$$\begin{aligned}
&a_n(z^n - \alpha^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(z-\alpha)\\
&= a_n(z-\alpha)S_n(z) + a_{n-1}(z-\alpha)S_{n-1}(z) + \cdots + a_1(z-\alpha)S_1(z)\\
&= (z-\alpha)[a_nS_n(z) + a_{n-1}S_{n-1}(z) + \cdots + a_1S_1(z)]\\
&= (z-\alpha)T_n(z)
\end{aligned}$$

où T_n est le polynôme $a_nS_n + a_{n-1}S_{n-1} + \cdots + a_2S_2 + a_1S_1$.

Il existe un polynôme T_n tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = (z-a)T_n(z)$$

ce qui montre que $P(z)$ est factorisable par $(z-a)$.

C20 $\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}, \boldsymbol{P(z) = z^3 - 2iz^2 + 25z - 50i}$

• vérifier que $\boldsymbol{2i}$ est une racine de $\boldsymbol{P}$ puis factoriser $\boldsymbol{P(z)}$

• résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\boldsymbol{P(z) = 0}$

$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - 2iz^2 + 25z - 50i$

• On a :

$$\begin{aligned}
P(2i) &= (2i)^3 - 2i(2i)^2 + 25(2i) - 50i\\
&= 8i^2i - 2i \times (-4) + 50i - 50i\\
&= -8i + 8i + 50i - 50i = 0
\end{aligned}$$

On constate que $P(2i) = 0$ donc **$\boldsymbol{2i}$ est une racine de $\boldsymbol{P}$.**

• $2i$ est une racine de P donc $P(z)$ est factorisable par $(z-2i)$ par conséquent il existe deux constantes complexes b et c telles que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-2i)(z^2 + bz + c)$, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{C}, z^3 - 2iz^2 + 25z - 50i&\\
&= z^3 + z^2(b-2i) + z(c - 2ib) - 2ic
\end{aligned}$$

Or, deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et des coefficients égaux, donc :

$$\begin{cases} b - 2i = -2i \\ c - 2ib = 25 \\ -2ic = -50i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 25 \\ 25 - 2i \times 0 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 25 \end{cases}$$

On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
&P(z) = (z-2i)(z^2 + 25) = (z-2i)(z^2 - (5i)^2)\\
&= (z-2i)(z+5i)(z-5i)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-2i)(z+5i)(z-5i)=0$$
$$\Leftrightarrow z=2i \; ou \; z=-5i \; ou \; z=5i$$

L'équation $P(z)=0$ admet donc pour solutions dans $\mathbb{C}$: $\boldsymbol{2i, -5i, 5i}$.

1	P(z):=z^3-(2 i)z^2+25z-50 i $\rightarrow$ $\mathbf{P(z) := z^3 - 2\,i\,z^2 + 25\,z - 50\,i}$
2	FactoriseCl(P(z)) $\rightarrow$ $\mathbf{(z+5\,i)\;(z-5\,i)\;(z-2\,i)}$
3	CRésoudre(P(z)=0) $\rightarrow$ $\mathbf{\{z=5\,i, z=-5\,i, z=2\,i\}}$

C21 $\boldsymbol{\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3-(2+i)z^2-2z-2-4i}$

• **calculer $\boldsymbol{P(-i)}$, en déduire une factorisation de $\boldsymbol{P(z)}$**

• **résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\boldsymbol{P(z)=0}$**

• $P(-i)=(-i)^3-(2+i)(-i)^2-2(-i)-2-4i$
$\quad = i+2+i+2i-2-4i=0$

$P(-i)=0$ donc $P(z)$ est factorisable par $(z+i)$, par conséquent il existe deux constantes complexes b et c telles que :

$\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z)=(z+i)(z^2+bz+c)$, ce qui s'écrit :

$\forall z \in \mathbb{C}$,

$z^3-(2+i)z^2-2z-2-4i=z^3+z^2(b+i)+z(c+bi)+ic$

Or, deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et des coefficients égaux :

$$\begin{cases} b+i=-2-i \\ c+bi=-2 \\ ic=-2-4i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-2i \\ c=\dfrac{-2-4i}{i} \\ c+bi=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-2i \\ c=\dfrac{-2i-4i^2}{i^2} \\ c+bi=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-2-2i \\ c=\dfrac{-2i+4}{-1} \\ c+bi=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-2i \\ c=-4+2i \\ -4+2i+(-2-2i)i=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-2i \\ c=-4+2i \\ -4+2i-2i-2i^2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2-2i \\ c=-4+2i \end{cases}$$

On a donc : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z)=(z+i)(z^2+(-2-2i)z-4+2i)$.

• $P(z)=0 \Leftrightarrow z+i=0 \; ou \; z^2+(-2-2i)z-4+2i=0$

$z^2+(-2-2i)z-4+2i=0 \; (*)$ est de la forme $az^2+bz+c=0$ avec $a=1$, $b=-2-2i$ et $c=-4+2i$, de discriminant :

$$\Delta = b^2-4ac=(-2-2i)^2-4(1)(-4+2i)$$
$$=(-2)^2-2(-2)(2i)+(2i)^2-4(-4+2i)$$
$$=4+8i-4+16-8i=16=4^2$$

$\delta=4$ convient, les solutions de l'équation $(*)$ sont :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{2+2i-4}{2(1)}=\frac{-2+2i}{2}=-1+i$$
$$z_2=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{2+2i+4}{2(1)}=\frac{6+2i}{2}=3+i$$

Finalement : $\boldsymbol{S_{\mathbb{C}}=\{-i\,;-1+i\,;3+i\}}$.

1	P(z):=z^3-(2+ i)z^2-2z-2-4 i $\rightarrow$ $\mathbf{P(z) := z^3 + (-2-i)\;z^2 - 2\,z - 2 - 4\,i}$
2	FactoriseCl(P(z)) $\rightarrow$ $\mathbf{(z-3-i)\;(z+1-i)\;(z+i)}$
3	CRésoudre(P(z)=0) $\rightarrow$ $\mathbf{\{z=3+i, z=-1+i, z=-i\}}$

$\boxed{P}$ Un polynôme de degré $n \geqslant 1$ admet au plus n racines distinctes.

C22 Démontrer la popriété précédente.

Soit P de degré $n \geqslant 1$, supposons que P admet au moins $n+1$ racines $a_1, \dots, a_{n+1}$ alors $P(z)$ est factorisable par $(z-a_1)$, …,$(z-a_{n+1})$ donc il existe un polynôme Q différent du polynôme

nul tel que, $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = (z - a_1) \times \ldots \times (z - a_{n+1}) \times Q(z)$.
Le degré d'un produit de polynômes étant égal à la somme de leurs degrés on en déduit :

$$\deg(P) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(n+1)\ termes} + \deg(Q) = n + 1 + \deg(Q) \geqslant n + 1 > n$$

ce qui est absurde ($\deg(P) = n$) par conséquent il faut rejeter l'hypothèse que P admet au moins $n + 1$ racines, on en déduit qu'il en admet au plus n.
Conséquencestrès importante : si l'on connait n racines distinctes d'un polynôme de degré $n \geqslant 1$ alors on les connait toutes.

$\boxed{P}$ $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = az^2 + bz + c$. On note z_1 et z_2 les racines complexes de P, distinctes ou confondues, alors :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$

C23 Démontrer la formule précédente.

En notant δ un nombre tel que $\delta^2 = \Delta$, on a :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

D'où :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} + \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-b - \delta - b + \delta}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\boldsymbol{\frac{b}{a}}$$

$$z_1 \times z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} \times \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{(-b - \delta)(-b + \delta)}{2a \times 2a} = \frac{(-b)^2 - \delta^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4a \times c}{4a \times a} = \boldsymbol{\frac{c}{a}}$$

C24 $\boldsymbol{\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$ **avec** $\boldsymbol{a_3 \neq 0}$.
On admet qu'il existe exactement trois racines comptées avec leur ordre de multiplicité, $\boldsymbol{z_1}$**,** $\boldsymbol{z_2}$ **et** $\boldsymbol{z_3}$**.**
Ecrire une factorisation de $\boldsymbol{P(z)}$**, en déduire que :**

$$\boldsymbol{z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_2}{a_3} \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 \times z_3 = -\frac{a_0}{a_3}}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} P(z) &= a_3(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \\ &= a_3(z - z_1)[z^2 - (z_2 + z_3)z + z_2 z_3] \\ &= a_3[z^3 + z^2(-z_2 - z_3 - z_1) + zE(z_1, z_2, z_3) - z_1 z_2 z_3] \\ &= a_3 z^3 + z^2\big(-a_3(z_1 + z_2 + z_3)\big) + a_3 E(z_1, z_2, z_3) - a_3 z_1 z_2 z_3 \end{aligned}$$

Or, deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et des coefficients égaux, donc :

$$\begin{cases} -a_3(z_1 + z_2 + z_3) = a_2 \\ -a_3 z_1 z_2 z_3 = a_0 \end{cases}$$

Comme $a_3 \neq 0$, ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \boldsymbol{z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_2}{a_3}} \\ \boldsymbol{z_1 z_2 z_3 = -\frac{a_0}{a_3}} \end{cases}$$

$\boxed{D}$ (rappel) Le **conjugué** d'un complexe z, noté $\bar{z}$, a la même partie réelle que z et une partie imaginaire opposée à celle de z.

$\boxed{F}$ Pour tout complexe z, on a :
• $\bar{\bar{z}} = z$ • $z + \bar{z} = 2 \times \mathrm{Re}(z)$ • $z - \bar{z} = 2i \times \mathrm{Im}(z)$

C25 Démontrer les trois formules précédentes.

$\boxed{F}$ Pour tout complexe z, on a :
• $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ • $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$
• $z \times \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

C26 Démontrer les trois formules précédentes

$\boxed{F}$ Pour tous complexes z et z', on a :
• $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ • $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'}$ • $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

C27 Démontrer les trois formules précédentes.

$\boxed{F}$ Pour tout complexe z et tout complexe non nul z', on a :
• $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$ • $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

C28 Démontrer les deux formules précédentes.

$\boxed{F}$ Pour tout complexes z, tout complexe non nul z' et tout entier relatif n, on a : • $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

C29 Démontrer la formule précédente.

$\boxed{P}$ **Formule du binôme de Newton**
Pous tous nombres complexes a et b et tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

C30 Démontrer la formule du binôme de Newton.

$\boxed{F}$ Pour tout complexe z, on a :
• $\bar{\bar{z}} = z$ • $z + \bar{z} = 2 \times \mathrm{Re}(z)$ • $z - \bar{z} = 2i \times \mathrm{Im}(z)$

C25 Démontrer les trois formules précédentes.
Posons $z = x + iy$, x et y réels, on a : $\bar{z} = x - iy$.
• $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$
• $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2 \times \mathrm{Re}(z)$
• $z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = x + iy - x + iy = 2iy = 2i \times \mathrm{Im}(z)$

$\boxed{F}$ Pour tout complexe z, on a :
• $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ • $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$
• $z \times \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

C26 Démontrer les trois formules précédentes.
Posons $z = x + iy$, x et y réels.
• $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow 2i \times \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$
• $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow 2Re(z) = 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z$
• $z \times \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$
$= [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

$\boxed{F}$ Pour tous complexes z et z', on a :
• $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ • $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'}$ • $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

C27 Démontrer les trois formules précédentes.
Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, x, y, x' et y' réels.
On a alors $\bar{z} = x - iy$ et $\bar{z'} = x' - iy'$.

• $\boldsymbol{\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}}$
$\overline{z + z'} = \overline{x + iy + x' + iy'} = \overline{x + x' + i(y + y')}$
$= x + x' - i(y + y') = x - iy + x' - iy' = \bar{z} + \bar{z'}$

• $\boldsymbol{\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'}}$
$\overline{z - z'} = \overline{x + iy - (x' + iy')} = \overline{x - x' + i(y - y')}$
$= x - x' - i(y - y') = x - iy - x' + iy' = x - iy - (x' - iy')$
$= \bar{z} - \bar{z'}$

• $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

$\overline{zz'} = \overline{(x + iy)(x' + iy')} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + yx')}$
$= xx' - yy' - i(xy' + yx') = (x - iy)(x' - iy') = \bar{z} \times \bar{z'}$

$\boxed{F}$ Pour tout complexe z et tout complexe non nul z', on a :
• $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ • $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

C28 Démontrer les deux formules précédentes.

• **première formule**

Posons $z' = X + iY$, X et Y réels, on a :

Remarquons d'abord que :

$$\frac{1}{z'} = \frac{1}{X + iY} = \frac{X - iY}{X^2 + Y^2} = \frac{X}{X^2 + Y^2} - i\frac{Y}{X^2 + Y^2}$$

donc :

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{X}{X^2 + Y^2} + i\frac{Y}{X^2 + Y^2}$$

d'autre part,

$$\frac{1}{\overline{z'}} = \frac{1}{X - iY} = \frac{X + iY}{X^2 + (-Y)^2} = \frac{X}{X^2 + Y^2} + i\frac{Y}{X^2 + Y^2}$$

donc :

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$$

• **deuxième formule**

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a :

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$$

$\boxed{F}$ Pour tout complexes z, tout complexe non nul z' et tout entier relatif n, on a : • $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

C29 Démontrer la foumule précédente.

(non rédigé) Par récurrence en utilisant, pour l'hérédité : conjugué d'un produit = produit des conjugués.

$\boxed{P}$ **Formule du binôme de Newton**

Pous tous nombres complexes a et b et tout entier naturel n :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

C30 Démontrer la formule du binôme de Newton.

On se donne deux complexes a et b.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_n :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

autrement dit :

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

• <u>initialisation</u>

$$(a + b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

par conséquent P_0 est vraie.

• <u>hérédité</u>

soit $n \in \mathbb{N}$ un entier natuerl pour lequel P_n est vraie, montrons que P_{n+1} est vraie c'est-à-dire que :

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = a(a + b)^n + b(a + b)^n$$

On a d'une part :

$$a(a+b)^n = a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k \quad (*)$$

et d'autre part, on a :

$$b(a+b)^n = b\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$

Posons $k' = k+1$:
si $k=0$ alors $k'=1$, si $k=n$ alors $k'=n+1$ donc l'égalité précédente donne :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$
$$= \sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n}{k'-1}a^{n-(k'-1)}b^{k'}$$
$$= \sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n}{k'-1}a^{n+1-k'}b^{k'}$$

Posons $k = k'$, on obient :

$$b(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k \quad (**)$$

Il résulte de $(*)$, $(**)$ et de $(a+b)^{n+1} = a(a+b)^n + b(a+b)^n$ que :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k$$
$$= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k$$
$$+ \binom{n}{n+1-1}a^{n+1-(n+1)}b^{n+1}$$
$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k\right] + b^{n+1}$$
$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}$$

Or, d'après la formule de Pascal : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

donc :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}$$
$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1-0}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$
$$+ \binom{n+1}{n+1}a^{n+1-(n+1)}b^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

On a bien :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

Donc P_{n+1} est vraie.

<u>Conclusion</u>

Il résulte des deux points précédents et du pricnipe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$