Matrices partie I

M01 On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- donner $5A$
- peut-on effectuer « $A + B$ », « $A - B$ » ?
- calculer $C = A \times B$
- peut-on effectuer « $B \times A$ » ?

M02 On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- calculer $C = A \times B$
- peut-on effectuer « $B \times A$ » ?

M03 On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $A \times B \neq B \times A$.

Même lorsque $A \times B$ et $B \times A$ existent tous les deux, ce qui n'est pas toujours le cas, les résultats sont souvent différents : on dit que **le produit des matrices n'est pas commutatif.**
Lorsque $A \times B = B \times A$ alors on dit que A et B sont des matrices qui **commutent**.

M04 On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A \times B = B \times A$, autrement dit que A et B commutent.

$\boxed{D}$ Une **matrice est nulle** lorsque tous ses coefficients sont nuls.
La matrice nulle de format $n \times p$, notée $\mathbf{0}_{n,p}$ est la matrice de format $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.
On évite la notation 0 qui peut représenter des matrices certes ayant tous leurs coefficients nuls mais dont les formats peuvent différer.

M05 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $C = A \times B$, montrer que C est une matrice nulle.

Un produit de deux matrices, carrées ou non, peut donner une matrice nulle sans qu'aucune des deux matrices ne soit une matrice nulle : $A \times B = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.
Si $A = 0$, alors les produits $A \times B$ et $B \times A$ lorsqu'ils existent donnent une matrice nulle.

$\boxed{D}$ Pour A matrice carrée d'ordre n on pose : $A^0 = I_n$ et pour tout entier naturel k : $A^{k+1} = A^k \times A$ (ou $A^{k+1} = A \times A^k$).
On a donc pour $k \geqslant 1$: $A^k = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k\ facteurs\ A}$ et $A^0 = I_n$.

M06 On considère la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Conjecturer l'expression de D^n, $n \in \mathbb{N}$, démontrer par récurrence.

$\boxed{P}$ Soit D une matrice diagonale, alors pour tout $n \geqslant 0$ la matrice D^n est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les coefficients diagonaux de D élevés à l'exposant n :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$$