Matrices Calcul matriciel, graphes

M01 On considère les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- quel est le **format** (ou **dimension**) de la matrice A, de la matrice B ?
- donner $5A$
- peut-on effectuer « $A + B$ », « $A - B$ » ?
- calculer $C = A \times B$
- peut-on effectuer « $B \times A$ » ?

M02 On considère les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- calculer $C = A \times B$
- peut-on effectuer « $B \times A$ » ?

$\boxed{D}$ Deux **matrices sont égales** lorsqu'elles ont la même dimension et que les coefficients situés à la même position sont égaux.

M03 On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que : $A \times B \neq B \times A$.

Même lorsque $A \times B$ et $B \times A$ existent tous les deux — ce qui n'est pas toujours le cas — les résultats peuvent être différents : on dit que **le produit des matrices <u>n'est pas</u> commutatif.**

Les matrices A et B **commutent** $\overset{déf}{\iff} A \times B = B \times A$.

M04 On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que A et B commutent.

$\boxed{D}$ **Quelques définitions**

- une **matrice est nulle** $\overset{déf}{\iff}$ tous ses coefficients sont nuls
- on note $0_{n,p}$ la matrice nulle de format $n \times p$
- pour une matrice A le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est souvent noté $a_{i,j}$ et on écrit $A = (a_{i,j})$
- une matrice de format $1 \times p$ est une matrice ligne
- une matrice de format $n \times 1$ est une matrice colonne
- une **matrice est carrée d'ordre n** $\overset{déf}{\iff}$ elle est de format $n \times n$
- une matrice **carrée** $(a_{i,j})$ est **diagonale** $\overset{déf}{\iff} i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$ (tous les nombres hors de la diagonales descendantes sont nuls)

M05 On considère les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose : $C = A \times B$, montrer que C est une matrice nulle.

$\boxed{i}$ Un produit de deux matrices, carrées ou non, peut donner une matrice nulle sans qu'aucune des deux matrices ne soit une matrice nulle : $A \times B = 0$ <u>n'implique pas</u> $A = 0$ ou $B = 0$.
Bien entendu : si $A = 0$ ou $B = 0$, alors les produits $A \times B$ et $B \times A$ — lorsqu'ils existent — donnent une matrice nulle.

$\boxed{D}$ Pour A matrice carrée d'ordre n on pose : $\boldsymbol{A^0 = I_n}$ et pour tout entier naturel k : $\boldsymbol{A^{k+1} = A \times A^k}$ (ou $A^{k+1} = A^k \times A$).
On a donc pour $k \geqslant 1$: $\boldsymbol{A^k} = \underbrace{\boldsymbol{A \times \ldots \times A}}_{k \text{ facteurs } A}$ et $A^0 = I_n$.

M06 On considère la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Conjecturer l'expression de D^n, $n \in \mathbb{N}$, démontrer par récurrence.

$\boxed{P}$ Soit D une matrice diagonale, alors pour tout $k \geqslant 0$ la matrice D^k est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les coefficients diagonaux de D élevés à l'exposant n :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{d_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{d_n} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{k}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d_1^k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{d_n^k} \end{pmatrix}$$

$\boxed{D}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **matrice identité d'ordre n** la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

exemples

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note parfois plus simplement I la matrice I_n.

$\boxed{P}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour toute matrice carré A d'ordre n, on a :

$$\boldsymbol{A \times I_n = I_n \times A = A}$$

M07 (voir PDF) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se propose de déterminer la forme explicite de A^n, $n \in \mathbb{N}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; on pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A + 6I$.

2. On pose $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = 6a_n$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = a_n A + b_n I$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $s_n = 3a_n + b_n$. Montrer que la suite (s_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 3^n$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $d_n = b_n - 2a_n$. Montrer que (d_n) est géométrique, déterminer sa raison et son premier terme, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = (-2)^n$.

d. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

e. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \times 3^n + 2 \times (-2)^n & 3 \times 3^n - 3 \times (-2)^n \\ 2 \times 3^n - 2 \times (-2)^n & 2 \times 3^n + 3 \times (-2)^n \end{pmatrix}$$

$\boxed{D}$ Soit A et B deux matrices carrées de même ordre n, alors :

A **est inversible d'inverse** $B \overset{déf}{\iff} A \times B = B \times A = I_n$.

On écrit alors $B = A^{-1}$ et on a donc : $\boldsymbol{A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n}$.

$\boxed{i}$ Dire que A est inversible d'inverse B revient à dire que B est inversible d'inverse A.

M08 Unicité de l'inverse d'une matrice carrée

Montrer que l'inverse d'une matrice carrée inversible est unique.

M09 Montrer A est inversible, d'inverse B, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{P}$ (admise) Condition suffisante pour être l'inverse

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n, alors :

- si $A \times B = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$
- si $B \times A = I_n$ alors A est inversible et $A^{-1} = B$

M10 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier qu'il existe un réel non nul λ à préciser tel que : $A \times B = \lambda I_3$.

En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

$\boxed{D}$ Une matrice carrée $(a_{i,j})$ d'ordre n est **symétrique** $\overset{déf}{\iff}$ pour tous $i \in \{1; \dots; n\}$ et $j \in \{1; \dots; n\}$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.

$\boxed{D}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice carrée 2×2 à coefficients réels.

Le **déterminant** de A est le réel : $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \boldsymbol{ad - bc}$.

M11 Soient a, b, c et d quatre réels, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question $\det(A) \neq 0$ et on pose $= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
   Vérifier que $A \times B = \det(A)\, I_2$, en déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
1. Dans cette question $\det(A) = 0$.
   On suppose que A est inversible et on pose $C = A^{-1} \times A \times B$:
   en calculant C de deux manières différentes montrer que $A = 0_2$.
   puis établir une contradiction.

$\boxed{P}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible $\Leftrightarrow$son déterminant est <u>non nul</u> et sous cette condition on a :

$$\blacktriangleright\ \boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}\, \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-c} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

$\boxed{i}$ Pour des matrices inversibles d'ordre $n \geqslant 3$ on détermine l'inverse le plus souvent en suivant les indications du sujet ou avec la calculatrice.

M12 Déterminer la matrice inverse lorsqu'elle existe :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \text{ où } m \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{P}}$ Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n, X et B deux matrices colonnes à n lignes, on a l'équivalence :

$$\boldsymbol{AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B}$$

M13 Démontrer la propriété précédente.

M14 Justifier que $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, déterminer son inverse, en déduire les solutions du système (S) : $\begin{cases} 10x + 3y = 5 \\ 7x + 2y = 6 \end{cases}$.

M15 Justifier que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, déterminer son inverse, en déduire les solutions du système : $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x + 2y = 20 \end{cases}$.

M16 Résolution d'un système à l'aide d'une matrice

On se propose de résoudre le système (S) : $\begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 5 \end{cases}$.

On pose : $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Donner l'écriture matricielle du système (S).
2. Calculer :
   $$A \times \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ -3 & 7 & -5 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$
   En déduire que A est inversible et donner son inverse.
3. Résoudre le système (S).

M17 Puissance d'une matrice

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$, puis démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
3. Donner la forme explicite de A^n, $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{P}$ On munit le plan d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, a, b sot des réels et à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ on associe $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que : $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.
Alors on passe de M à M' par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

M18 Démontrer la propriété précédente.

$\boxed{P}$ On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on se donne une matrice carrée à coefficients réels A et à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ on associe $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que : $\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\times\begin{pmatrix}\boldsymbol{x'}\\\boldsymbol{y'}\end{pmatrix}$, on passe de M à M' par :

- la **symétrie d'axe $(\boldsymbol{O};\vec{\boldsymbol{\imath}})$** $\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$
- la **symétrie d'axe $(\boldsymbol{O};\vec{\boldsymbol{\jmath}})$** $\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$
- l'**homothétie de centre $\boldsymbol{O}$ et de rapport $\boldsymbol{k}$** $\in\mathbb{R}^*$ $\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{k}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\boldsymbol{k}\end{pmatrix}$
- la **rotation de centre $\boldsymbol{O}$, d'angle $\boldsymbol{\theta}$** $\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}\cos\boldsymbol{\theta}&-\sin\boldsymbol{\theta}\\\sin\boldsymbol{\theta}&\cos\boldsymbol{\theta}\end{pmatrix}$

M19 Démontrer les trois premiers points de la propriété précédente.

M20 Démontrer le dernier point de la propriété précédente.

$\boxed{D}$ Une **suite de matrices colonnes** à k lignes est une fonction de $\mathbb{N}$ vers l'ensemble des matrices colonnes à k colonnes.

Exemple

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=\begin{pmatrix}n+1\\n^2\end{pmatrix}$, alors (U_n) est une suite de matrices colonnes à 2 lignes.
On définit de manière analogue les suites de matrices lignes à k colonnes.

$\boxed{P}$ A est une matrice carrée d'ordre k et (U_n) une suite de matrice colonnes à k lignes définie par son premier terme U_0 et la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}, \boldsymbol{U_{n+1}=AU_n}$, alors $\forall\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}, \boldsymbol{U_n=A^nU_0}$.
On dit parfois qu'une telle suite (U_n) est **géométrique**.

M21 Démontrer la propriété précédente.

M22 Suite vérifiant $\boldsymbol{U_{n+1}=AU_n}$

On considère (b_n) et (c_n) telles que $b_0=1\,000$, $c_0=1\,500$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N}, b_{n+1}=0{,}3b_n+0{,}5c_n \text{ et } c_{n+1}=-0{,}5b_n+1{,}3c_n$$

On pose $A=\begin{pmatrix}0{,}3&0{,}5\\-0{,}5&1{,}3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}0{,}8&0{,}5\\0&0{,}8\end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n : $U_n=\begin{pmatrix}b_n\\c_n\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n : $U_{n+1}=AU_n$.
   En déduire U_n en fonction de A et n.
2. Déterminer P^{-1} puis vérifier que : $A=PTP^{-1}$.
   En déduire que pour tout entier naturel n : $A^n=PT^nP^{-1}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$T^n=\begin{pmatrix}0{,}8^n&0{,}5n\times0{,}8^{n-1}\\0&0{,}8^n\end{pmatrix}$$
4. En déduire que :
$$U_n=0{,}8^n\begin{pmatrix}1\,000+312{,}5n\\1\,500+312{,}5n\end{pmatrix}$$

On tente de modéliser l'évolution de buses (les prédateurs) et de campagnols (les proies) dans un territoire donné par les suites (b_n) et (c_n) respectivement, b_n modélisant le nombre de buses au 1er juin de l'année $2000+n$ et le nombre c_n celui de campagnols à la même date.
D'après cette modélisation, quelle devrait être le nombre de campagnols le 1er juin 2022 ?

M23 Suite vérifiant $\boldsymbol{U_{n+1} = AU_n + B}$

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, (U_n) est la suite de matrices colonnes définie par son premier terme $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n + B$.

1. Calculer U_1 et U_2.
2. Déterminer la matrice colonne vérifiant $C = AC + B$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - C$.
   - a. Déterminer V_0.
   - b. Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
   - c. En déduire V_n en fonction de n, $n \in \mathbb{C}$.
4. Déterminer U_n en fonction de n, $n \in \mathbb{C}$.

M24 Suit vérifiant $\boldsymbol{U_{n+1} = AU_n + B}$

Deux entreprises A et B proposent des abonnements.
En 2013, elles sont chacune 300 milliers abonnés.

On note : a_n le nombre, en milliers, d'abonnés de A la n-ième année après 2013 et b_n le nombre, en milliers, pour B la n-ième année après 2013. Ainsi : $a_0 = b_0 = 300$.

Une étude permet de dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}2b_n + 60 \text{ et } b_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}6b_n + 70$$

Pour tout entier naturel n on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Donner U_0.
2. Déterminer la matrice carrée M et la matrice colonne C telles que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n + C$.
3. Déterminer la matrice colonne U telle que : $U = MU + C$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $V_n = U_n - U$.
   - a. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = MV_n$.
   - b. En déduire V_n en fonction de M, n et V_0.

Dans toute la suite on admet que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{10}{3}\begin{pmatrix} -10 \times 0{,}8^n - 14 \times 0{,}5^n \\ -5 \times 0{,}8^n + 14 \times 0{,}5^n \end{pmatrix}$$

5. a. Exprimer U_n en fonction de n, $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire a_n et b_n en fonction de n.
   b. Etudier la convergence de (a_n) et de (b_n), interpréter ces limites dans le contexte de l'exercice.

$\boxed{D}$ **quelques définitions**

- un graphe d'**ordre n** $\in \mathbb{N}^*$ est un ensemble de n points appelés **sommets** du graphe : certains sommets sont reliés
- si tous les liens entre deux sommets sont des traits on dit le graphe est ***non orienté*** et chacun de ces traits est une **arête** du graphe
- si tous les liens entre certains sommets sont des flèches on dit que le graphe est **orienté** et chacune de ces flèches est un **arc**
- une arête ou un arc qui relie un sommet à lui-même est une **boucle**

- dans un graphe ***non orienté*** si une arête relie A et D on note $A - D$ ou $D - A$
- dans un graphe **orienté** si un arc va du sommet E vers le sommet F on écrit $E \to F$ (la flèche impose donc un sens)
- dans un graphe ***non orienté*** les sommets A et B **sont adjacents** lorsque $A - B$ ou $B - A$
  (partant de A on peut atteindre B en 1 pas et réciproquement)
- dans un graphe **orienté** le sommet B est adjacent à A lorsque $A \to B$ (*le sommet d'arrivé est adjacent au sommet de départ*)
  (partant de A on peut atteindre B en 1 pas)
- le **degré d'un sommet** est le nombre de traits partant ou allant vers ce sommet sans tenir compte du sens des flèches si le graphe est orienté ; dans un graphe orienté ou non une boucle comptera pour 2 dans la détermination du degré de ce sommet
- un graphe est **complet** lorsqu'il ne contient aucune boucle et que tout sommet est adjacent à chacun des autres sommets

$\boxed{P}$ Dans un graphe ***non orienté***, la somme des degrés de chaque sommet est égale au double du nombre d'arêtes.

$\boxed{D}$ **matrice d'adjacence d'un graphe orienté ou non orienté**

On considère un graphe dont les sommets sont notés de 1 à n

- si ce graphe est ***non orienté*** la **matrice d'adjacence** est la matrice carrée d'ordre n (n lignes et n colonnes) dont le coefficient $a_{i,j}$ est :

— égal à $\mathbf{1}$ lorsque ***i* et *j* sont adjacents** (il existe une arête reliant les sommets i et j)

— égal à $\mathbf{0}$ sinon, c'est-à-dire lorsque i et j **ne sont pas** adjacents

- si ce graphe est **orienté** la **matrice d'adjacence** est la matrice carrée d'ordre n (n lignes et n colonnes) dont le coefficient $a_{i,j}$ est :

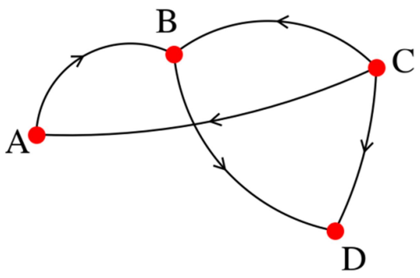
— égal à $\mathbf{1}$ lorsque ***j* est adjacent à *i*** (il existe un arc de i vers j)

— égal à $\mathbf{0}$ sinon c'est-à-dire lorsque j n'est pas adjacent à i

$\boxed{i}$ la matrice d'un graphe orient est forcément symétrique

- pour un graphe ***non orienté*** une **chaîne reliant deux sommets A** et F est une liste de sommets dont le début est A et la fin F telle que l'on passe d'un sommet au suivant de cette liste par une arête du graphe, le nombre d'arêtes de cette liste est la **longueur de la chaîne**
- pour un graphe **orienté** un **chemin allant du sommet A au sommet** F est une liste débutant en A et finissant en F telle que l'on passe d'un sommet de la liste au suivant par une flèche du graphe,
  le nombre de flèches dans cette liste est la **longueur du chemin**
- un graphe non orienté est **connexe** lorsqu'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe
- une chaîne/chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues est dit(e) **fermé(e)**
- une chaîne/chemin fermé(e) composé(e) d'arêtes/flèches toutes distinctes est un cycle/circuit.

M25 On considère le graphe $\mathcal{G}$:



- $\mathcal{G}$ est-il orienté ou non orienté, quel est son ordre ?
- pour chacun des sommets, indiquer son degré
- $C \rightarrow B \rightarrow D$ est un chemin de longueur 2 débutant au sommet C et aboutissant au sommet D : donner un autre chemin de longueur 2 aboutissant en D
- donner la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$

$\boxed{P}$ théorème du nombre de chemins ou chaînes de longueur k

M est la matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non) dont les sommets sont numérotés de 1 à n, k est un entier naturel non nul :

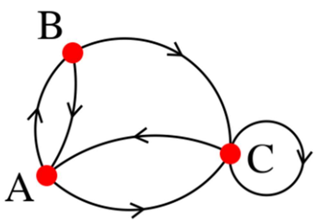
- cas d'un graphe **orienté**

le nombre de chemins de longueur k allant du sommet i au sommet j est égal au coefficient de M^k situé à la l'intersection de la ligne i et de la colonne j

- cas d'un graphe ***non orienté***

le nombre de chaînes de longueur k d'extrémités les sommet i et j est égal au coefficient de M^k situé à la l'intersection de la ligne i et de la colonne j

M26 On note M la matrice d'adjacence du graphe orienté ci-dessous

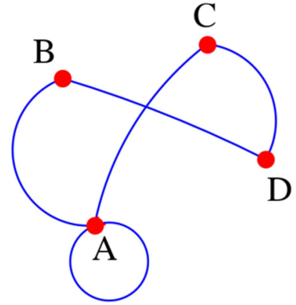


- vérifier que :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- déterminer le nombre de chemins de longueurs 3 allant de B à A, les écrire tous

M27 M est la matrice d'adjacence du graphe non orienté ci-dessous :



- donner M puis vérifier que :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 15 & 7 & 7 & 10 \\ 7 & 9 & 9 & 2 \\ 7 & 9 & 9 & 2 \\ 10 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

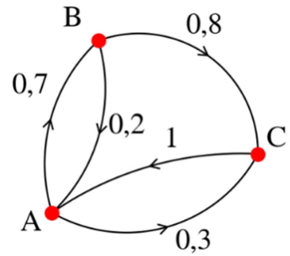
- combien y a-t-il de chaînes de longueurs 4 d'extrémités C et A ? Les écrire toutes.

$\boxed{D}$ quelques définitions

- un graphe orienté ou non est **pondéré** lorsque ses flèches/arêtes sont affectées de nombres positifs
- le **poids** d'un chemin/d'une chaîne est la somme des poids des flèches/arêtes qui le(la) composent
- un **graphe probabiliste** est un graphe **orienté pondéré** tel que les poids de chaque flèche **appartient à l'intervalle $[0\,;1]$** et tel que la somme des poids des chemins **partant d'un même sommet** est égale à 1
- la matrice construite à partir d'un graphe probabiliste pour laquelle à l'intersection de la ligne i et colonne j figure le poids de la flèche allant de i vers j s'appelle **matrice stochastique**

M28 On considère un graphe probabiliste à deux sommets A et B tel que : $P_A(A) = 0{,}3$ et $P_B(A) = 0{,}4$. Représenter ce graphe probabiliste puis donner la matrice stochastique , les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.

M29 On considère le graphe probabiliste :



1. Interpréter les nombres 0,7 et 0,8 en terme de probabilités conditionnelles.
2. Donner la matrice stochastique.

M30 graphe probabiliste à deux états : étude d'un exemple

Un élève est interrogé en mathématique à chaque cours.
On note S l'état « il réussit à l'exercice » et E l'état «il ne réussit pas l'exercice». Une étude montre que :

• si cet élève réussit à faire un exercice alors il a 90% de chance de réussir l'exercice au cours suivant

• lorsqu'il ne réussit pas à faire un exercice alors il a 60% de chance de réussir l'exercice au cours suivant.

1. Résumer ces informations par un graphe probabiliste à deux états S et E, donner la matrice stochastique P les sommets étant pris dans l'ordre S puis E.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\pi_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne indiquant que pour le n-ième cours l'élève a la probabilité a_n de réussir son exercice et la probabilité b_n de ne pas le réussir. Le premier jour l'élève a « 5% de chances » de réussir :

a. Déterminer π_1.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide d'un arbre de probabilité montrer que $\pi_{n+1} = (0{,}9a_n + 0{,}6b_n \quad 0{,}1a_n + 0{,}4b_n)$, puis que : $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$.

c. Si $(a \quad b)$ est un état vérifiant $(a \quad b) = (a \quad b) \times P$ on dit que c'est un état stable.
Montrer qu'il existe exactement un état stable π à préciser.

d. On suppose que (a_n) et (b_n) sont convergentes et que :
$$\pi = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n \quad \lim_{n\to+\infty} b_n\right)$$
Préciser les limites de (a_n) et (b_n) et les interpréter.

Cas des graphes à deux états **Thiaude P.**

P est la matrice de transition d'un graphe probabiliste à deux états, $\pi_0 = (a_0 \quad b_0)$ est l'état initial, $\pi_n = (a_n \quad b_n)$ est l'état à l'étape n et $\pi = (a \quad b)$ est un état stable s'il en existe c'est-à-dire un état tel que : $\pi = \pi \times P$.

On dit que (π_n) converge vers $(c \quad d)$ lorsque :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = c \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n = d$$

Étude 1

On suppose que P ne contient **aucun coefficient nul** par conséquent qu'il existe deux réels α et β, $0 < \alpha \leqslant 1$ et $0 < \beta \leqslant 1$ tels que :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{pmatrix}$$

1. Justifier que : $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ et $2-\alpha-\beta \neq 0$.

2. Montrer qu'il existe un et un seul état stable et que :

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} & \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta} \end{pmatrix}$$

3. En utilisant le Lemme, démontrer que pour tout état initial (π_n) « converge » vers π autrement dit que si l'on note $\pi = (x \quad y)$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = x \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n = y$$

Lemme

Soient a et b deux constantes réelles avec : $-1 < a < 1$, on pose : $u_0 =$ une valeur fixée et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.

Alors (u_n) converge vers $\frac{b}{1-a}$.

Bilan

Si la matrice de transition a ses coefficients **tous non nuls**, alors il existe un unique état stable et quel que soit l'état initial π_0, (π_n) converge vers l'état stable.

Étude 2

On suppose : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe un et un seul état stable π et le préciser.

2. Peut-on trouver un état initial π_0 tel que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers π ? Si oui donner un tel état initial π_0.

Étude 3

On suppose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, étudier l'existence d'état(s) stable(s) ?

Étude 4

On suppose : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe un et un seul état stable π, le préciser.

2. Démontrer que pour tout état initial π_0, la suite de terme général $\pi_n = (a_n \quad b_n)$ converge vers π.

Bilan

Pour un graphe probabiliste à deux états on a montré l'implication :

les coefficients de matrice de transition sont **tous non nuls**	$\Rightarrow$	il y a un unique état stable π et (π_n) converge vers π quel que soit l'état initial