# Nombres complexes II

$\boxed{D}$ Une **suite de nombres complexes** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

• $(z_n)$ est **arithmétique** $\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n + r$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \boldsymbol{z_n = z_p + (n-p) \times r}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{z_0 + \cdots + z_n = \frac{(z_0 + z_n) \times (n+1)}{2}}$$

• $(z_n)$ est **géométrique** $\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = q \times z_n$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \boldsymbol{z_n = z_p \times q^{n-p}}$$

et si $q \neq 1$ : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{z_0 + \cdots + z_n = z_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

$\boxed{i}$ Déterminer la **nature** d'une suite c'est dire si elle est arithmétique, ou géométrique, ou bien ni l'un ni l'autre.
Se poser la question du sens de variation d'une suite de nombres complexes n'a pas de sens.

$\boxed{D}$ Le **plan complexe** est le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ tel que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = +\frac{\pi}{2}$.

Le point $M$ a pour **affixe** le complexe $+iy$ , $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ $\overset{déf}{\Leftrightarrow}$ $M(x;y)$ dans $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on écrit : $z_M = x + iy$, ou $M(x+iy)$.

Le vecteur $\vec{u}$ a pour **affixe** le complexe $x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ $\overset{déf}{\Leftrightarrow}$ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on écrit : $z_{\vec{u}} = x + iy$ ou $\vec{u}(x+iy)$.

Pour $x$ et $y$ réels on a les équivalences :

$$\boldsymbol{M(x;y) \Leftrightarrow z_M = x + iy} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = x + iy}$$

$\boxed{i}$ À un point on peut associer un complexe et un seul, à un complexe on peut associer un point et un seul.
À un vecteur on peut associer un complexe et un seul, à un complexe on peut associer un vecteur et un seul.

$\boxed{P}$ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et $\lambda$ un réel, alors :

• $\boldsymbol{z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}}$ • $\boldsymbol{z_{\vec{u}-\vec{v}} = z_{\vec{u}} - z_{\vec{v}}}$ • $\boldsymbol{z_{\lambda\vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}}$ • $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$

• $I$ est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\boldsymbol{z_I = \frac{z_A + z_B}{2}}$

**C01** On pose $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = iz_n + 1$.

1. Calculer $z_1$ et $z_2$ puis indiquerla nature de $(z_n)$.
2. Déterminer $a \in \mathbb{C}$ tel que : $a = ia + 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = z_n - a$ où $a$ est déterminé à la question précédente.
   a. Calculer $v_0$.
   b. Montrer que $(v_n)$ est géométrique et préciser sa raison.
   c. Exprimer $v_n$ en fonction de $n$, $n \in \mathbb{N}$.
4. Déduire des questions précédentes que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1 - i^n)$$
5. Déterminer $z_n$ suivant les valeurs de $n$.

**C02** Justifier les cinq formules précédentes.

**C03** $ABCD$ est un parallélogramme tel que $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 2$ et $z_C = 6 + i$ : déterminer l'affixe de $D$.

**C04** $G$ est le centre de gravité d'un triangle $ABC$, démontrer que :

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

$\boxed{D}$ Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M(z)$, **le module** de $z$, noté $|z|$, est la distance $OM$ :

$$|z| \overset{\text{def}}{=} OM$$

$\boxed{i}$ Si $z \in \mathbb{R}$, alors le module de $z$ et la valeur absolue de $z$ coincident ce qui autorise l'identique notation.

$\boxed{P}$ On a l'équivalence : ▶ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

$\boxed{F}$ **quelques formules**

- si $z = x + iy$, $x$ et $y$ réels, alors : ▶ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : ▶ $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : ▶ $z \times \bar{z} = |z|^2$
- $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a :

$$▶ \ \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

**C05** Démontrer les formules précédentes.

$\boxed{F}$ Pour tous points $A$ et $B$, on a : ▶ $|z_B - z_A| = AB$.

**C06** Démontrer la formule précédente.

**C07** Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ dans chacun des cas suivantes :
**1.** $|z + 3i| = 5$ **2.** $|z - 5 - 4i| = |z + 1 - 2i|$ **3.** $|\bar{z} - 1 + 5i| = 2$

$\boxed{F}$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall z' \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

- ▶ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- ▶ $|z^n| = |z|^n$

**C08** Démontrer les deux formules précédentes.

**C09** Déterminer : $|(1 + i)^{12}|$.

$\boxed{P}$ Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$ tels que $z' \neq 0$, on a :

$$▶ \ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

**C10** Démontrer la formule précédente.

$\boxed{P}$ **inégalité triangulaire**
$\forall z \in \mathbb{C}, \forall z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$|z - z'| \leqslant |z| + |z'| \quad \text{et} \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

**C11** Démontrer les deux inégalités précédentes.

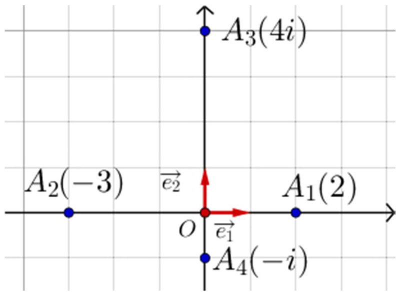
$\boxed{D}$ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, pour tout complexe non nul $z$ on note $M$ le point d'affixe $z$ et $M'$ le point d'intersection de $[OM)$ avec le cercle trigonométrique.

**Un argument** de $z$, noté $\arg(z)$, **est une mesure** de l'angle $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$ c'est donc un réel ayant pour image $M'$ sur le cercle trigonométrique.

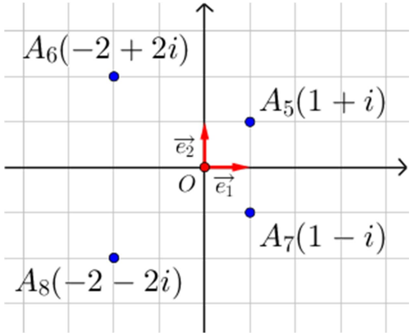
L'**argument principal** de $z$, noté $\mathrm{Arg}(z)$ avec un $A$ majuscule est celle des mesures de $(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})$ qui appartient à $]-\pi; \pi]$.

Attention, le nombre **zéro** n'a pas d'argument !

**C12** Par lecture graphique donner un argument de : $z_1 = 2$, $z_2 = -3$, $z_3 = 4i$ et $z_4 = -i$.



**C13** Par lecture graphique donner un argument de : $z_5 = 1 + i$, $z_6 = -2 + 2i$, $z_7 = 1 - i$, $z_8 = -2 - 2i$.




$\boxed{P}$ Pour $z \neq 0$ et $z' \neq 0$, on a l'équivalence :

▶ $(z \neq 0 \text{ et } z' \neq 0), z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi] \end{cases}$

$\boxed{P}$ Soit $z$ un complexe <u>**non nul**</u> d'argument $\boldsymbol{\theta}$, on a les équivalences :

▶ $\theta \equiv 0 \Leftrightarrow z$ est un **réel strictement positif**

▶ $\theta \equiv \pi \Leftrightarrow z$ est un **réel strictement négatif**

▶ $\theta \equiv +\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \Leftrightarrow z$ est un **imaginaire pur avec** $\mathbf{Im}(z) > 0$

▶ $\theta \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \Leftrightarrow z$ est un **imaginaire pur avec** $\mathbf{Im}(z) < 0$

$\boxed{F}$ Soit $z = x + iy$, $x$ et $y$ réels, un complexe non nul d'argument $\boldsymbol{\theta}$ :

▶ $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ est la **forme trigonométrique** de $z$

• $x = \mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\theta)$ et $y = \mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\theta)$

▶ $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$

**C14** Soit $z$ un complexe de forme trigonométrique :

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

• préciser le module et un argument de $z$

•déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $z$

**C15** Donner la forme trigonométrique de : $z_9 = 5i$, $z_{10} = -3i$, $z_{11} = 7$ et $z_{12} = -\sqrt{2}$.

$\boxed{i}$ **écritures $b(\cos(a) \pm i\sin(a))$, $z \neq 0$, $a$ et $b$ réels**

• soit $z = b(\cos(a) + i\sin(a))$, $z \neq 0$, $a$ et $b$ réels

− si $b > 0$, alors $b = |z|$ et $a$ est un argument de $z$

− si $b < 0$, alors une transformation d'écriture est nécessaire

• soit $z = b(\cos(a) - i\sin(a))$, $z \neq 0$, $a$ et $b$ réels

− si $b > 0$, alors une transformation d'écriture est nécessaire

− si $b < 0$, alors une transformation d'écriture est nécessaire

**C16** Déterminer la forme trigonométrique de $z = 7 - 7i$.

**C17** Déterminer la forme trigonométrique de $z = 1 + \sqrt{3}\,i$.

$\boxed{P}$ **Trigonométrie : formules d'addition**

Pour tous réels $a$ et $b$ :

• $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

• $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

• $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

• $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

**C18** Soient $a$ et $b$ deux réels, $M$ et $N$ les points images sur le cercle trigonométrique de $a$ et $b$ respectivement.

En expimant de deux manières différentes $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM}$, retrouver la formule donnant $\cos(a-b)$, en déduire les trois autres formules.

$\boxed{P}$ Soit $x$ un réel quelconque.

**formules de l'angle double**

▶ $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

▶ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

**formules de réduction d'un carré**

• $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ • $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

**angles associés**

▶ $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ ▶ $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

▶ $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ ▶ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

▶ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ ▶ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

▶ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ ▶ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

**C19** Démontrer à l'oral formules précédentes.

$\boxed{P}$ Pour tout nombre complexe non nul $z$, on a :

▶ $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ ▶ $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$

**C20** Démontrer les deux formules précédentes.

$\boxed{P}$ Pour tous complexes non nuls $z$ et $z'$ et tout entier naturel $n$ :

▶ $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

▶ $\arg(z^n) \equiv n \times \arg(z)\ [2\pi]$

**C21** Démontrer les deux formules précédentes.

**C22** Déterminer la forme algébrique de :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2026}$$

$\boxed{P}$ Pour tous complexes non nuls $z$ et $z'$ :

▶ $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ ▶ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

**C23** Démontrer les deux formules précédentes.

**C24** On pose :

$$a = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ et } b = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

En calculant de deux manières différentes $\dfrac{a}{b}$ déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

$\boxed{D}$ Pour tout réel $\boldsymbol{\theta}$, on pose : ▶ $e^{i\theta} = \cos(\boldsymbol{\theta}) + i\sin(\boldsymbol{\theta})$.
On convient que : $\boldsymbol{e^{\theta i} = e^{i\theta}}$ et que : $\boldsymbol{e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)}}$.

$\boxed{P}$ Pour tous réels $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\theta'}$, on a :

▶ $|e^{i\theta}| = 1$ ▶ $\boldsymbol{e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}}$ ▶ $\boldsymbol{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$

**C25** Démontrer les trois formules précédentes.

$\boxed{P}$ Pour tout réel $\boldsymbol{\theta}$, on a : $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

**C26** Démontrer la formule précédente.

$\boxed{D}$ Tout $z$ non nul admet pour ▶**forme exponentielle : $|z|e^{i\theta}$** où $\theta$ est un argument de $z$.

**C27** Donner la forme exponentielle de : 5, $-7i$ et $\sqrt{3}+i$.

$\boxed{P}$ **Formules d'Euler**

Pour tout réel $\theta$,on a :

▶ $\boldsymbol{\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}$ et ▶ $\boldsymbol{\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$

**C28** Démontrer les formules d'Euler.

**C29** En utilisant les formules d'Euler, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

$\boxed{P}$ **Formule de Moivre**

Pour tout réel $\theta$ et tout entier naturel $n$, on a :

▶ $\boldsymbol{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n}$

autrement dit :

▶ $\boldsymbol{e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n}$

**C30** Démontrer la formule de Moivre.

**C31** Retrouver les formules de trigonométrie donnant $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

**C32** Pour $x \in \mathbb{R}$ exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, et exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$.

$\boxed{P}$ $A$, $B$ et $C$ trois points deux à deux distincts du plan complexe de repère $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, alors :

$$\boldsymbol{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]}$$

▶ $\boldsymbol{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]}$

**C33** On souhaite démontrer les deux formules précédentes.
On se place dans le plan complexe de repère$(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

1. Soient $A$ et $B$ deux points distincts et $M$ le point d'affixe $z_B - z_A$ : quelle est la mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM})$ ?
   En déduire : $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$.
2. On admet que, pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a : $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})\ [2\pi]$ et $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})\ [2\pi]$.
   Soient $A$, $B$ et $C$ trois points deux à deux distincts.
   Démontrer que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.

**C34** On pose : $z_A = 2 + 3i$, $z_B = 4 + 2i$ et $z_C = 3 + 5i$.
Calculer le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
En déduire la nature du triangle $ABC$.

$\boxed{D}$ On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

$\boxed{i}$ $\mathbb{U}$ est parfois appelé **« cercle unité »** même s'il ne s'agit pas d'un ensemble de points mais d'un ensemble de nombres complexes.

$\boxed{P}$ **quelques propriétés**

▶ $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$

- si $z \in \mathbb{U}$ et $z' \in \mathbb{U}$, alors $z \times z' \in \mathbb{U}$ et $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$

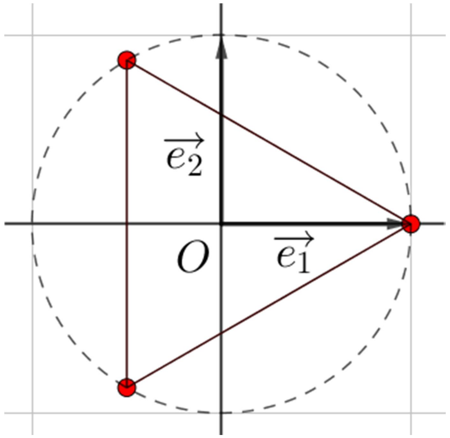
**C35** Démontrer la stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et quotient.

$\boxed{D}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **racine $n$-ième de l'unité** toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation: $z^n = 1$.
On note parfois $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité.
Par exemple on a : $\mathbb{U}_1 = \{1\}, \mathbb{U}_2 = \{1; -1\}, \mathbb{U}_4 = \{1; i; -1; -i\}$
en résolvant dans $\mathbb{C}$ respectivement : $z = 1$, $z^2 = 1$ et $z^4 = 1$.

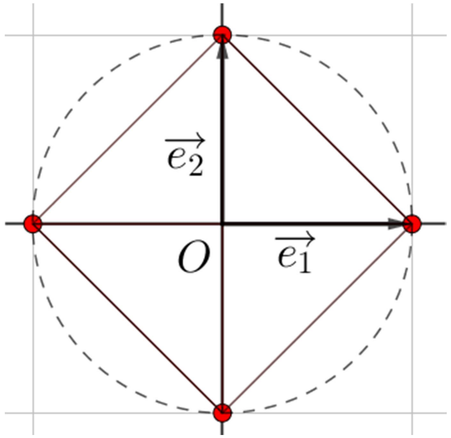
**C36** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)$ : $z^3 = 1$. Vérifier que les trois solutions s'écrivent : $e^{ik\frac{2\pi}{3}}$, $k \in \{0; 1; 2\}$.

**C37** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équations : $z^4 = 1$. Vérifier que les solutions s'écrivent : $e^{ik\frac{2\pi}{4}}$ avec $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.

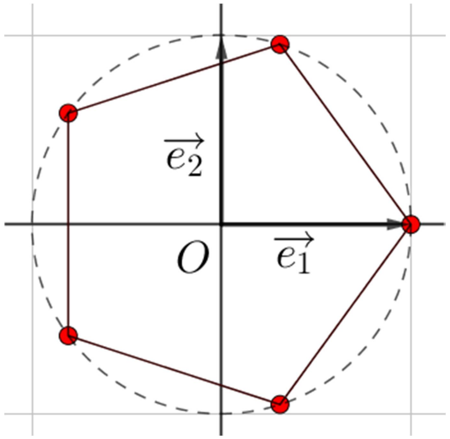
$\boldsymbol{z^3 = 1}$



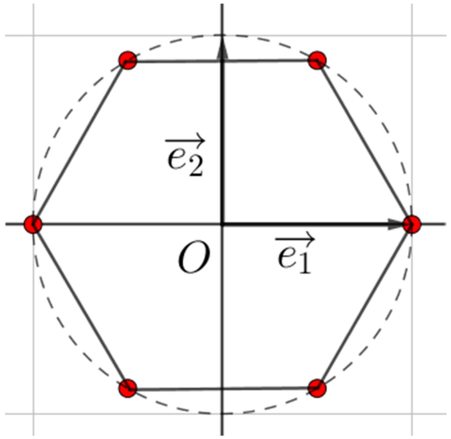

$\boldsymbol{z^4 = 1}$




$\boldsymbol{z^5 = 1}$




$\boldsymbol{z^6 = 1}$




$\boxed{P}$ ▶Soit $n \in \mathbb{N}^*$, **les solutions de** $\boldsymbol{z^n = 1}$ sont les $\boldsymbol{n}$ nombres tous distincts $\boldsymbol{e^{ik\frac{2\pi}{n}}}$ avec $k$ entier naturel v érifiant $\boldsymbol{0 \leqslant k \leqslant n - 1}$.

$\boxed{i}$ Lorsque $n \geqslant 3$, les points d'affixes respectives $z_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ sont les sommets d'un polygone régulier à $n$ côtés donc le point ayant pour affixe 1 est l'un des sommets.

$\boxed{P}$ $A, B, C$ et $D$ sont quatre points tous distincts, alors :

- $\boldsymbol{(AB) /\!/ (CD)} \Leftrightarrow \dfrac{\boldsymbol{z_D - z_C}}{\boldsymbol{z_B - z_A}}$ **est un réel** non nul
- $\boldsymbol{A, B}$ **et** $\boldsymbol{C}$ **sont alignes** $\Leftrightarrow \dfrac{\boldsymbol{z_C - z_A}}{\boldsymbol{z_B - z_A}}$ **est un reel** non nul
- $\boldsymbol{(AB) \perp (CD)} \Leftrightarrow \dfrac{\boldsymbol{z_D - z_C}}{\boldsymbol{z_B - z_A}}$ **est un imaginaire pur** non nul

**C38** Justifier les trois points de la propriété précédente.

**C39** Dans le plan complexe on considère $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives : $z_A = 2 + 4i$, $z_B = 4 + 3i$, $z_C = 5 + i$ et $z_D = 1 + 3i$.
Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont-elles parallèles ?

**C40** Dans le plan complexe, on considère $A$, $B$ et $C$ tels que :
$z_A = 7 + 5i$, $z_B = 4 + 4i$ et $z_C = -2 + 2i$.
Les points $A$, $B$ et $C$ sont-ils alignés ?

**C41** Dans le plan complexe, on considère $A$, $B$ et $C$ tels que :
$z_A = 3 + 2i$, $z_B = 1 + 4i$ et $z_C = 6 + 5i$.

Calculer $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

Que peut-on en déduire sur la nature du triangle $ABC$ ?

**C42** Soit $x \in \mathbb{R}$, factoriser : $A(x) = \cos(x) + \cos(3x)$.

**C43** On s'intéresse à la somme des racines $n$-ièmes de l'unité.

1. Donner sans justification les solutions de $z^2 = 1$, les solutions de $z^3 = 1$ et les solutions de $z^4 = 1$. Pour chacune de ces équations indiquer ce que vaut la somme de ses solutions.

2. **Etude du cas général**
   Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
   Déterminer la somme des racines $n$-ièmes de l'unité.

**C44** À tout point $M$ d'affixe $z$ on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que : $z' = iz + 3 + i$.
Un point confondu avec le point qui lui est associé est appelé « point invariant ».

1. Calculer l'affixe du point $E'$ associé à $E(4 + i)$.

2. Montrer qu'il existe un seul point invariant $A$, en déterminer l'affixe.

3. **a.** Soit $M \neq \mathrm{A}$, donner la forme exponentielle complexe de :
$$\frac{z' - z_{\mathrm{A}}}{z - z_{\mathrm{A}}}$$
   **b.** Soit $M$ un point du plan : par quelle transformation graphique passe-t-on de $M$ à $M'$ ?

**C45** Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0\ [2\pi]$.

1. Montrer que, pour tout réel $\theta$ :
$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2i$$

2. En déduire que :
$$1 + \cos x + \cos 2x = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos(x)$$
et que :
$$\sin(x) + \sin(2x) = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \sin(x)$$

**C46** Vérifier que, pour tout réel $\theta$ :
$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2i$$
puis démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0\ [2\pi]$ :
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

**C47** Soient $p$ et $q$ deux réels.

1. À l'aide des formules d'Euler, montrer que :
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (*)$$

2. Déduire de $(*)$ que :
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad (**)$$