Nombres complexes I

$\boxed{P}$ $\mathbb{C}$ est un ensemble contenant les réels tel que :

• $\mathbb{C}$ est muni d'une addition, d'une soustraction, d'une multiplication qui « prolongent » l'addition, la soustraction et la multiplication des réels et qui possèdent les mêmes propriétés algébriques c'est-àdire : associativité, distributivité …
Les éléments de $\mathbb{C}$ s'appellent **nombres complexes** ou **complexes**

• il existe un complexe noté $\boldsymbol{i}$ dont le carré est (-1) : $\boldsymbol{i^2 = -1}$

• tout complexe s'écrit de manière unique sous forme $a + ib$ où a et b sont des réels : c'est la **forme algébrique**; le réel a est la **partie réelle** et le réel b est la **partie imaginaire**

• la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$ se note $\mathbf{Re}(z)$, la partie imaginaire $\mathbf{Im}(z)$
la partie imaginaire est **un réel** !
exemple : $\mathrm{Re}(3 + 5i) = 3$, $\mathrm{Im}(3 + 5i) = 5$

• deux complexes sont égaux ⇔ leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales :

$$\boldsymbol{z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{Re}(z) = \mathbf{Re}(z') \\ \mathbf{Im}(z) = \mathbf{Im}(z') \end{cases}}$$

C01 Donner la partie réelle et la partie imaginaire de : $5 - 4i$, $9i$ et 6.

$\boxed{i}$ Il **n'y pas** de relation d'ordre compatible avec la structure de $\mathbb{C}$.

$\boxed{P}$ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, tout $z' \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

• $\boldsymbol{(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2}$ • $\boldsymbol{(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2}$

• $\boldsymbol{(z + z')(z - z') = z^2 - z'^2}$ • $\boldsymbol{z \times z' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0}$

$\boxed{i}$ La règle du produit nul dans $\mathbb{C}$ se démontre en utilisant les formes algébriques puis en procédant par disjonctions de cas avec utilisation de la règle du produit nul dans $\mathbb{R}$.

C02 Donner la forme algébrique de z_1, z_2 et z_3 avec :
$z_1 = (5 + 2i) + (-1 + 7i)$, $z_2 = (3 + 5i)(1 + 4i)$, $z_3 = (3 + 2i)^2$.

C03 Calculer i^3 puis donner la forme algébrique de $(2 + i)^3$.

$\boxed{i}$ Tout réel a est « identifié » à $a + 0i$, en particulier $0_{\mathbb{R}}$ est identifié à $0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}i$: $\boldsymbol{0 = 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}i}$.

C04 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(2z - 3 + i)(iz - 5) = 0$.
On donnera les solutions sous forme algébrique.

C05 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^2 + 9 = 0$ et $z^4 - 1 = 0$.

$\boxed{D}$ Un complexe dont la partie réelle est $0_{\mathbb{R}}$ est un **imaginaire pur** : un complexe est un imaginaire pur lorsqu'il peut s'écrire ib où $b \in \mathbb{R}$.
$\boxed{i}$ Un **réel** est un complexe de ***partie imaginaire*** nulle, et qu'un ***imaginaire pur*** est un complexe de **partie réelle** nulle :
z est un imaginaire pur ⇔ $\boldsymbol{\mathbf{Re}(z) = 0}$, **$z$ est un réel** ⇔ $\boldsymbol{\mathbf{Im}\,(z) = 0}$
Le seul nombre qui soit simultanément réel et imaginaire pur est 0.

C06 Calculer $(5 - i)^2$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = 24 - 10i$.

C07 Déterminer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $(x + yi)^2 = -5 + 12i$.

C08 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = 45 - 28i$.

C09 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = -24 + 10i$.

C10 Donner la forme algébrique de chacun des complexes :

$$z = \frac{1}{3 + 4i} \quad et\ z' = \frac{1 + 2i}{5 + 12i}$$

$\boxed{D}$ Le **conjugué $\bar{z}$** d'un complexe z a même partie réelle que z et une partie imaginaire opposée, ainsi :
• si $z = x + iy$ avec x et y réels, alors $\bar{z} = x - iy$
• si $z = x - iy$ avec x et y réels, alors $\bar{z} = x + iy$

$\boxed{D}$ **quelques définitions**

• l'inverse de $z \neq 0$ est le complexe noté $\dfrac{1}{z}$ tel que :

$$z \times \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times z = 1$$

• le quotient de $z \in \mathbb{C}$ par $z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est le complexe noté $\dfrac{z}{z'}$ égal au produit de z par l'inverse de z' :

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = \frac{1}{z'} \times z$$

$\boxed{P}$ **Equation du second degré**

On considère l'expression du second degré $az^2 + bz + c$ à coefficients a, b, c tous réels, $a \neq 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
Δ étant réel on peut parler de son signe et trois cas peuvent se présenter :

• $\Delta > 0$, l'expression admet deux racines réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

• $\Delta = 0$, l'expression admet une racine réelle double :

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

• $\Delta < 0$, l'expression admet deux racines non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

C11 Démontrer le troisième point de la propriété précédente.

C12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 4z + 5 = 0$.

C13 $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - 4z^2 + 14z - 20$

1. Montrer qu'il existe deux réels b et c, à préciser, tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - 2)(z^2 + bz + c)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

$\boxed{D}$ **Quelques définitions**

• soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que P est un **polynôme de degré n à coefficients complexes** (ou polynôme de degré $\boldsymbol{n}$) lorsqu'il existe $(n + 1)$ complexes a_0, a_1, …, a_n avec $a_n \neq 0$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

• la **fonction nulle** $z \mapsto 0$ s'appelle aussi **polynôme nul** : c'est le seul polynôme qui n'a pas de degré

• soit Pun polynôme, on a les équivalences :

P est un **polynôme non nul** $\overset{déf}{\Leftrightarrow}$ P est différent du polynôme nul
$\Leftrightarrow$ il existe $z \in \mathbb{C}, P(z) \neq 0$

• une **fonction constante** s'appelle aussi **polynôme constant** :
c'est soit le polynôme nul lorsque cette constante est zéro, soit un polynôme de degré 0 lorsque cette constante est différente de zéro

• P, Q sont des polynômes non constants, alors P est **factorisable par** Q lorsqu'il existe un polynôme S non constant tel que :
$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = Q(z) \times S(z)$, qui s'écrit aussi : $P = Q \times S$

$\boxed{P}$ **Quelques propriétés**

• deux polynômes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même degré et ont mêmes coefficients

• soient P et Q deux polynômes non nuls, alors :

$$\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$$

$\boxed{P}$ z et a sont deux complexes, n un entier naturel non nul, on a :

$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1}a^0 + \cdots + z^{n-1-k}a^k + \cdots + z^0 a^{n-1})$$

C14 Justifier la formule générale de factorisation de $z^n - a^n$.

$\boxed{D}$ $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}$ est **une racine** de $P \overset{déf}{\Leftrightarrow} P(\boldsymbol{\alpha}) = 0$

(une racine est donc une complexe annulant le polynôme)

$\boxed{P}$ Soit P un polynôme non constant et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a les équivalences :

$\boldsymbol{\alpha}$ est une racine de $P \Leftrightarrow$ il existe un polynôme Q tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - \boldsymbol{\alpha})Q(z)$$

$\boxed{P}$ **Théorème de d'Alembert-Gauss (admis)**

Tout polynôme non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

C15 Démontrer la propriété donnant une factorisation de $P(z)$.

C16 $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 - 2iz^2 + 25z - 50i$

- vérifier que $2i$ est une racine de P puis factoriser $P(z)$
- résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

$\boxed{D}$ P polynôme non constant de degré n, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$:

- $\boldsymbol{\alpha}$ est une **racine simple** lorsque $P(z)$ est factorisable par $(z - \boldsymbol{\alpha})$ mais pas par $(z - \boldsymbol{\alpha})^2$
- $\boldsymbol{\alpha}$ est une **racine double** lorsque $P(z)$ est factorisable par $(z - \boldsymbol{\alpha})^2$ mais pas par $(z - \boldsymbol{\alpha})^3$
- $\boldsymbol{\alpha}$ est une **racine de multiplicité $\boldsymbol{k}$** lorsque $P(z)$ est factorisable par $(z - \boldsymbol{\alpha})^k$ mais pas par $(z - \boldsymbol{\alpha})^{k+1}$

▶ $\boxed{P}$ Un polynôme non constant de degré n admet exactement n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

$\boxed{P}$ $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$, $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = az^2 + bz + c$.

On note z_1 et z_2 les racines complexes de P, distinctes ou non, alors :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$$

$\boxed{i}$ Par convention on parle de la somme « des » racines et du produit «des» racines de P que z_1 et z_2 soient distinctes ou non.

C17 Démontrer les formules de la somme et du produit des racines.

C18 $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ avec $a_3 \neq 0$.

On admet qu'il existe exactement trois racines comptées avec leur ordre de multiplicité, notées z_1, z_2 et z_3, montrer que :

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_2}{a_3} \quad \text{et} \quad z_1 \times z_2 \times z_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

$\boxed{P}$ (admis) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un polynôme P de degré n (à coefficients complexes) :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad \text{avec } a_n \neq 0$$

- la **somme** des n racines est égale à : $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
- le **produit** des n racines est égal à : $(-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

C19 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 + (2 - i)z^2 + (2 - 2i)z - 2i$.

1. Que valent la somme et le produit des racines de P ?
2. Montrer que i est une racine de P, en déduire une factorisation de $P(z)$.
3. Déterminer toutes les racines de P.

$\boxed{D}$ (rappel) Le **conjugué** d'un complexe z, noté $\bar{z}$, a même partie réelle que z et une partie imaginaire opposée à celle de z.

$\boxed{F}$ Pour tout complexe z, on a :
• $\overline{\overline{z}} = z$ • $z + \bar{z} = 2 \times \mathrm{Re}(z)$ • $z - \bar{z} = 2i \times \mathrm{Im}(z)$

C20 Démontrer les trois formules précédentes.

$\boxed{F}$ Pour tout complexe z, on a :
• $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ • $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$
• $z \times \overline{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

C21 Démontrer les trois formules précédentes.

$\boxed{F}$ Pour tous complexes z et z', on a :
• $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ • $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$ • $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

C22 Démontrer les trois formules précédentes.

$\boxed{F}$ Pour tout complexe z et tout complexe non nul z', on a :
• $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ • $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

C23 Démontrer les deux formules précédentes.

$\boxed{F}$ Pour tout complexes z, tout complexe non nul z' et tout entier relatif n, on a : • $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

C24 Démontrer la formule précédente.

$\boxed{P}$ **Formule du binôme de Newton**
Pous tous nombres complexes a et b et tout entier naturel n :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

C25 Démontrer la formule du binôme de Newton.