

Arithmétique partie I

[D] Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, alors « a **divise** b » signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $b = k \times a$. Notation : « a divise b » se note : « $a|b$ ».

► $a|b \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$

[i] On écrit parfois : $a|b \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$.

Lorsque $a|b$ ont dit aussi que a **est un diviseur de** b ou encore que b **est un multiple de** a .

A01 Écrire une égalité pour justifier ...

- justifier que : $5 \mid (-15)$

On a :

$-15 = (-3) \times 5$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $-15 = k \times 5$,

à savoir $k = -3$, donc : $5 \mid (-15)$

- justifier que : $(-8) \mid (-32)$

$-32 = 4 \times (-8)$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-32 = k \times (-8)$, à savoir $k = 4$, donc $(-8) \mid (-32)$

- on sait que $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ et $x = 7y$, quelles affirmations peut-on en déduire parmi : $x|y$, $y|x$, $x|7$, $7|x$, $7|y$, $y|7$?

$y|x$ et $7|x$

- un élève affirme : « $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}$, on a : $a + b|a^2 - b^2$ », si cette affirmation est vraie la démontrer, sinon en donner un contre-exemple.

On a : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = k \times (a + b)$ avec $k = a - b$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a^2 - b^2 = k \times (a + b)$ donc $a + b|a^2 - b^2$

[P] Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a : $1|a$, $(-1)|a$, $a|a$ et $(-a)|a$.

A02 Démontrer la propriété précédente.

$a = 1 \times a$ montre que $1|a$ et que $a|a$

$a = (-1) \times (-a)$ montre que $(-1)|a$ et que $(-a)|a$

[P] Le cas particulier de 0

- tout entier relatif divise 0 : $\forall a \in \mathbb{Z}, a|0$, en particulier : $0|0$

► si $a \neq 0$, alors 0 ne divise pas a : $a \neq 0 \Rightarrow \text{non } (0|a)$

A03 Démontrer la propriété précédente.

- soit $a \in \mathbb{Z}$, on a : $0 = 0 \times a$ donc a est un diviseur de 0

conclusion : $\forall a \in \mathbb{Z}, a|0$

- soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $0|a$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k \times 0$, or $k \times 0 = 0$, donc : $a = 0$; on a montré que : $0|a \Rightarrow a = 0$.

En prenant la contraposée : $\text{non } (a = 0) \Rightarrow \text{non } (0|a)$ ce qui s'écrit aussi : $a \neq 0 \Rightarrow \text{non } (0|a)$.

[P] Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, on a les équivalences :

► $b|a \Leftrightarrow (-b)|a \Leftrightarrow b|(-a) \Leftrightarrow (-b)|(-a)$

A04 Démontrer la première équivalence.

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

- montrons que : $b|a \Rightarrow (-b)|a$

$b|a$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = k \times b$, qui s'écrit aussi :

$a = (-k) \times (-b)$. Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = k' \times (-b)$,

à savoir $k' = -k$, donc $(-b) | a$.

- montrons que : $(-b)|a \Rightarrow b|a$

$(-b)|a$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = k \times (-b)$, qui s'écrit aussi :

$a = -kb$ ou encore $a = (-k) \times b$.

Il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = k' \times b$, à savoir $k' = -k$, donc $b|a$.

Conclusion

On a montré que $b|a \Rightarrow (-b)|a$ et $(-b)|a \Rightarrow b|a$ donc on a l'équivalence : $b|a \Leftrightarrow (-b)|a$.

[D] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2}$.

[P] Soient x et y deux réels, on a :

- $|x| \geq 0$
- $|0| = 0$
- si $x \geq 0$ alors $|x| = x$
- $|x \times y| = |x| \times |y|$
- $|-x| = |x|$
- $|1| = |-1| = 1$
- si $x < 0$ alors $|x| = -x$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

A05 Démontrer chacun des points de la propriété précédente.

Soient x et y deux réels.

- montrons que : $|x| \geq 0$

Le résultat d'une racine carrée est un réel positif ou nul donc :

$\sqrt{x^2} \geq 0$, autrement dit : $|x| \geq 0$.

conclusion : $|x| \geq 0$.

- montrons que : $|-x| = |x|$

On a : $|-x| = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{(-1 \times x)^2} = \sqrt{(-1)^2 \times x^2} = \sqrt{x^2} = |x|$.

conclusion : $|-x| = |x|$.

- montrons que : $|0| = 0$

On a : $|0| = \sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$.

conclusion : $|0| = 0$.

- montrons que : $|1| = |-1| = 1$

$|1| = \sqrt{1^2} = \sqrt{1} = 1$ et $|-1| = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

conclusion : $|1| = 1$.

- montrons que : si $x \geq 0$ alors $|x| = x$

Supposons $x \geq 0$, $|x| = \sqrt{x^2} = x$ (par définition de $\sqrt{\quad}$).

conclusion : si $x \geq 0$ alors $|x| = x$.

- montrons que : si $x < 0$, alors $|x| = -x$

Supposons $x < 0$, alors $-x > 0$ et on a :

$|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$ (d'après le point précédent).

conclusion : si $x < 0$, alors $|x| = -x$.

- montrons que : $|x \times y| = |x| \times |y|$

$|x \times y| = \sqrt{(x \times y)^2} = \sqrt{x^2 \times y^2} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{y^2} = |x| \times |y|$

conclusion : $|x \times y| = |x| \times |y|$.

- montrons que : $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

si $x = 0$ alors $|x| = |0| = 0$ donc on a l'implication $x = 0 \Rightarrow |x| = 0$

si $|x| = 0$ montrons que $x = 0$.

Procédons par disjonction de cas :

1^{er} cas $x \geq 0$

$x \geq 0$ donc $|x| = x$, par conséquent l'égalité : $|x| = 0$ devient $x = 0$

2^e cas : $x < 0$

$x < 0$ donc $|x| = -x$, par conséquent l'égalité : $|x| = 0$ devient

$-x = 0$, ou encore $x = 0$ qui est à rejeter (on est dans le cas $x < 0$)

conclusion : $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

[P] ► Tout diviseur positif de $a \neq 0$ est compris au sens large entre 1 et $|a|$: $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ d \in \mathbb{N} \text{ et } d|a \end{cases} \Rightarrow 1 \leq d \leq |a|$.

A06 Démontrer la propriété précédente.

Soit $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{N}$ tel que $d|a$, démontrons que : $1 \underset{\textcircled{1}}{\leq} d \underset{\textcircled{2}}{\leq} |a|$.

On a $d|a$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k \times d$, d'où :

$$|a| = |k \times d| = |k| \times |d| = |k| \times d$$

Résumons : $|a| = |k| \times d$ (*)

• **Montrons que $1 \underset{\textcircled{1}}{\leq} d$**

Supposons $d = 0$, alors d'après (*) : $|a| = |k| \times d = |k| \times 0 = 0$
donc $|a| = 0$, autrement dit $a = 0$ ce qui est FAUX, donc il faut
rejeter la supposition « $d = 0$ » : on peut donc affirmer que $d \neq 0$,
et comme d est un entier naturel on en déduit que : $1 \underset{\textcircled{1}}{\leq} d$.

• **Montrons que $d \underset{\textcircled{2}}{\leq} |a|$**

Supposons $|k| = 0$, alors l'égalité (*) montre que : $|a| = 0 \times d = 0$,
donc $|a| = 0$, ce qui est FAUX, donc il faut rejeter la supposition
 $|k| = 0$, et comme $|k|$ est un entier naturel on en déduit $|k| \geq 1$.

On a : $1 \leq |k|$, puis en multipliant par $d > 0$: $1 \times d \leq |k| \times d$,
c'est-à-dire : $d \underset{\textcircled{2}}{\leq} |a|$.

Conclusion : $1 \underset{\textcircled{1}}{\leq} d \underset{\textcircled{2}}{\leq} |a|$.