Maths XP CS $n°3$ 8 Janvier 2025 **Thiaude P.**

Durée : 55 minutes Calculatrice autorisée en mode examen

La calculatrice ne peut être utilisée que pour vérifier au brouillon les calculs.
La qualité et la précision de la rédaction entreront dans la notation de la copie.

<u>Exercice 1 [5 points]</u> Une équation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + (-2 + 7i)z - 11 - 7i = 0$.

<u>Exercice 2 [9 points]</u> Une équation du troisième degré

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $P(z) = z^3 + z^2(2 - 5i) + z(5 - 10i) - 25i$.

1. Soit y **un réel**, montrer que la partie réelle de $P(yi)$ est : $-2y^2 + 10y$, et que la partie imaginaire de $P(yi)$ est : $-y^3 + 5y^2 + 5y - 25$.
2. En déduire que P admet exactement une racine imaginaire pure et préciser cette racine.
3. En déduire une factorisation de $P(z)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2z + 5 = 0$.
5. Déduire des questions précédentes toutes les racines de P.

<u>Exercice 3 [6 points]</u> Une équation du troisième degré à coefficients réels

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 18z - 40$.

1. Démontrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a :
   « si α est une racine de P, alors son conjugué $\bar{\alpha}$ est une racine de P ».
   On rappellera les formules utilisées.
2. Calculer $P(1 + 3i)$, en déduire deux racines distinctes de P.
3. Déterminer une factorisation de $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

<u>BONUS [1 point]</u> Une équation du quatrième degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 = 28 - 96i$.

Corrigé

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + (-2+7i)z - 11 - 7i = 0$.

$z^2 + (-2+7i)z - 11 - 7i$ est de la forme $az^2 + bz + c$ avec $a = 1$, $b = (-2+7i)$ et $c = -11 - 7i$, de discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2+7i)^2 - 4(1)(-11-7i) = 4 + 2(-2)(7i) + (7i)^2 + 44 + 28i$$
$$= 4 - 28i + 49i^2 + 44 + 28i = 4 - 28i - 49 + 44 + 28i = -1$$

En posant $\delta = i$ on a : $\delta^2 = i^2 = -1 = \Delta$.

D'après les formules du cours, l'équation (E) admet pour solutions :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-(-2+7i)-i}{2(1)} = \frac{2-7i-i}{2} = \frac{2-8i}{2} = \frac{2(1-4i)}{2} = 1-4i$$
$$z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-(-2+7i)+i}{2(1)} = \frac{2-7i+i}{2} = \frac{2-6i}{2} = \frac{2(1-3i)}{2} = 1-3i$$

Conclusion

L'équation (E) admet pour solutions : $\boldsymbol{1-4i}$ et $\boldsymbol{1-3i}$.

Exercice 2

$\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}, \boldsymbol{P(z) = z^3 + z^2(2-5i) + z(5-10i) - 25i}$

1. **Soit y un réel, montrer que la partie réelle de $P(yi)$ est : $-2y^2 + 10y$, et que la partie imaginaire de $P(yi)$ est : $-y^3 + 5y^2 + 5y - 25$.**

   Pour $y \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\begin{aligned} &P(yi) \\ &= (yi)^3 + (yi)^2(2-5i) + yi(5-10i) - 25i \\ &= y^3i^3 + y^2i^2(2-5i) + yi(5-10i) - 25i \\ &= -iy^3 - y^2(2-5i) + 5yi - 10yi^2 - 25i \\ &= -iy^3 - 2y^2 + 5iy^2 + 5yi + 10y - 25i \\ &= -2y^2 + 10y + i(-y^3 + 5y^2 + 5y - 25) \end{aligned}$$
   Résumons : $P(yi) = -2y^2 + 10y + i(-y^3 + 5y^2 + 5y - 25)$ $(*)$.
   Or, $y \in \mathbb{R}$ donc $-2y^2 + 10y \in \mathbb{R}$ et $-y^3 + 5y^2 + 5y - 25 \in \mathbb{R}$, il résulte de $(*)$ que :
   $\boldsymbol{\mathrm{Re}\big(P(yi)\big) = -2y^2 + 10y}$ et $\boldsymbol{\mathrm{Im}\big(P(yi)\big) = -y^3 + 5y^2 + 5y - 25}$.

2. **Montrer que P admet exactement une racine imaginaire pure et préciser cette racine.**
   Dire que P admet une racine imaginaire pure signifie qu'il existe un **réel** y tel que $P(yi) = 0$, autrement dit tel que $\mathrm{Re}\big(P(yi)\big) = 0$ et $\mathrm{Im}\big(P(yi)\big) = 0$,
   c'est-à-dire tel que : $-2y^2 + 10y = 0$ et $-y^3 + 5y^2 + 5y - 25 = 0$ $(**)$.
   Or, $-2y^2 + 10y = 0 \Leftrightarrow y(-2y+10) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ *ou* $y = 5$
   • si $y = 0$, alors en remplaçant dans $(**)$ on obtient : $-0^3 + 5(0)^2 + 5(0) - 25 = 0$ ce qui est faux donc on doit rejeter $y = 0$
   • si $y = 5$, alors en remplaçant dans $(**)$ on obtient : $-5^3 + 5(5)^2 + 5(5) - 25 = 0$ ce qui est vrai, par conséquent on peut accepter $y = 5$.

   Conclusion : **P admet pour unique racine imaginaire pure $5i$.**

3. En déduire une factorisation de $P(z)$.

$5i$ est une racine de P donc d'après le théorème de factorisation $P(z)$ est factorisable par $(z-5i)$, par conséquent il existe Q de degré 2 tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = (z-5i)Q(z)$$

Or, $P(z) = z^3 + z^2(2-5i) + z(5-10i) - 25i$ donc il existe $(b,c) \in \mathbb{C}^2$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z^3 + z^2(2-5i) + z(5-10i) - 25i = (z-5i)(z^2+bz+c)$.

Or, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$(z-5i)(z^2+bz+c) = z^3 + z^2(b-5i) + z(c-5ib) - 5ic$$

donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$z^3 + z^2(2-5i) + z(5-10i) - 25i = z^3 + z^2(b-5i) + z(c-5ib) - 5ic$$

Par identification :

$$\begin{cases} b-5i = 2-5i \\ c-5ib = 5-10i \\ -5ic = -25i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c-10i = 5-10i \\ 5c = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 5 \\ c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 5 \end{cases}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-5i)(z^2+2z+5)$.

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+2z+5=0$.

z^2+2z+5 est de la forme az^2+bz+c avec $a=1$, $b=2$ et $c=5$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(5) = 4-20 = -16^2$.

En posant $\delta = 4i$, on a $\delta^2 = (4i)^2 = 16i^2 = -16 = \Delta$.

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^2+2z+5=0$ sont :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-2-4i}{2(1)} = \frac{2(-1-2i)}{2} = -1-2i$$

$$z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-2+4i}{2(1)} = \frac{2(-1+2i)}{2} = -1+2i$$

L'équation $z^2+2z+5=0$ admet pour solutions dans $\mathbb{C}$: $-1-2i$ et $-1+2i$.

Remarque Les coefficients étant tous réels et $\Delta < 0$ donc on pouvait aussi affirmer que les solutions sont les deux complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-2-i\sqrt{16}}{2(1)} = \frac{-2-4i}{2} = \frac{2(-1-2i)}{2} = -1-2i$$

$$z_2 = \overline{z_1} = -1+2i$$

5. Déduire des questions précédentes toutes les racines de P.

Les racines de P sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$.

Or, on a les équivalences :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-5i)(z^2+2z+5) = 0 \Leftrightarrow z-5i = 0 \text{ ou } z^2+2z+5 = 0$$
$$\Leftrightarrow z = 5i \text{ ou } z = -1-2i \text{ ou } z = -1+2i$$

Conclusion

Les racines de P sont : $\mathbf{5i}$, $\mathbf{-1-2i}$ et $\mathbf{-1+2i}$.

<u>Exercice 3</u>

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 18z - 40$.

1. **Démontrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a : « si α est une racine de P, alors son conjugué $\bar{\alpha}$ est une racine de P ». On rappellera les formules utilisées.**

   Supposons que $\in \mathbb{C}$ est une racine de P, autrement dit que : $P(\alpha) = 0$.
   On a :
   $$P(\bar{\alpha}) = (\bar{\alpha})^3 - 6(\bar{\alpha})^2 + 18\bar{\alpha} - 40 = \overline{\alpha^3} - 6\overline{\alpha^2} + \overline{18}\bar{\alpha} - \overline{40} = \overline{\alpha^3} - \overline{6\alpha^2} + \overline{18\alpha} - \overline{40}$$
   $$= \overline{\alpha^3 - 6\alpha^2 + 18\alpha - 40} = \bar{0} = 0$$

   On a : $P(\bar{\alpha}) = 0$, donc **$\bar{\alpha}$ est une racine de P**.

   Formules utilisées sont : $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$, $\overline{zz'} = \bar{z} \times \overline{z'}$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z - z'} = \bar{z} - \overline{z'}$

2. **Calculer $P(1 + 3i)$, en déduire deux racines distinctes de P.**

   $$\begin{aligned} &P(1+3i)\\ &= (1+3i)^3 - 6(1+3i)^2 + 18(1+3i) - 40\\ &= (1+3i)(1+3i)^2 - 6(1+3i)^2 + 18(1+3i) - 40 \end{aligned}$$

   Or, $(1+3i)^2 = 1 + 2(1)(3i) + (3i)^2 = 1 + 6i - 9 = -8 + 6i$
   donc :
   $$\begin{aligned} &P(1+3i)\\ &= (1+3i)(-8+6i) - 6(-8+6i) + 18(1+3i) - 40\\ &= -8 + 6i - 24i - 18 + 48 - 36i + 18 + 54i - 40\\ &= -8 - 18 + 48 + 18 - 40 + i(6 - 24 - 36 + 54)\\ &= 0 + 0i\\ &= 0 \end{aligned}$$

   On a : $P(1+3i) = 0$ autrement dit $1 + 3i$ est une racine de P, donc d'après la question précédente $\overline{1+3i}$ est aussi une racine de P, autrement dit $1 - 3i$ est une racine de P.

   Conclusion : **$1 + 3i$ et $1 - 3i$ sont deux racines distinctes de P.**

3. **Déterminer une factorisation de $P(z)$.**

   Un polynôme de degré 3 $z \mapsto a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ la somme des racines est : $-\dfrac{a_2}{a_3}$.
   Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 - 6z^2 + 18z - 40$ donc la somme des trois racines $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 1 - 3i$ et z_3 est :
   $$1 + 3i + 1 - 3i + z_3 = \frac{+6}{1} \Leftrightarrow 2 + z_3 = 6 \Leftrightarrow z_3 = 6 - 2 \Leftrightarrow z_3 = 4$$
   Une factorisation de $P(z)$ s'écrit $a(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, donc :
   $$\boldsymbol{\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - 4)(z - 1 - 3i)(z - 1 + 3i)}$$

   <u>Autre méthode</u> **:**

   $1 + 3i$ et $1 - 3i$ sont des racines de P donc il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que :
   $$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - (1+3i))(z - (1-3i))(z - c)$$
   Pour $z = 0$, on obtient :
   $$P(0) = \big(-(1+3i)\big)\big(-(1-3i)\big)(-c) = (1+3i)(1-3i)(-c) = (1^2 - (3i)^2)(-c)$$
   $$= (1+9)(-c) = -10c$$

Or, $P(0) = (0)^3 - 6(0)^2 + 18(0) - 40 = -40$, donc $-10c = -40$ i.e. $c = 4$.

Conclusion
Une factorisation est : $P(z) = (z - 1 - 3i)(z - 1 + 3i)(z - 4)$.

Les racines de P sont les solutions de $P(z) = 0$. Or, on a les équivalences :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 1 - 3i)(z - 1 + 3i)(z - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow z = 1 + 3i \text{ ou } z = 1 - 3i \text{ ou } z = 4$$

Une factorisation de $P(z)$ s'écrit $a(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, donc :

$$\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}, \boldsymbol{P(z) = (z - 4)(z - 1 - 3i)(z - 1 + 3i)}$$

BONUS

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{z^4 = 28 - 96i}$.

Remarquons d'abord que :

$$28 - 96i = 28 - 2 \times 48i = 64 - 36 + 2 \times 48i = 8^2 - 2(8)(6i) + (6i)^2 = (8 - 6i)^2$$

On a les équivalences :

$$z^4 = 28 - 96i \Leftrightarrow z^4 - (28 - 96i) = 0 \Leftrightarrow (z^2)^2 - (8 - 6i)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow [z^2 - (8 - 6i)][z^2 + (8 - 6i)] = 0$$

Or, on a :

— d'une part :

$$z^2 - (8 - 6i) = z^2 - [(3)^2 - 2(3)(i) + i^2] = z^2 - (3 - i)^2 = [z - (3 - i)][z + (3 - i)]$$

— d'autre part :

$$z^2 + (8 - 6i) = z^2 - i^2(3 - i)^2 = z^2 - [i(3 - i)]^2 = z^2 - (1 + 3i)^2]$$
$$= [z - (1 + 3i)][z + (1 + 3i)$$

Donc :

$$[z^2 - (8 - 6i)][z^2 + (8 - 6i)] = 0$$
$$\Leftrightarrow [z - (3 - i)][z + (3 - i)][z - (1 + 3i)][z + (1 + 3i)] = 0$$
$$\Leftrightarrow z = 3 - i \text{ ou } z = -3 + i \text{ ou } z = 1 + 3i \text{ ou } z = -1 - 3i$$

Conclusion :

L'équation de départ admet donc pour solutions : $\boldsymbol{3 - i, -3 + i, 1 + 3i}$ et $\boldsymbol{-1 - 3i}$.

Complément

Soit $c \in \mathbb{C}$, on considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $z^4 = c$.

Montrons que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une solution de cette équation, alors les nombres $i\alpha$, $-\alpha$ et $-i\alpha$ sont aussi des solutions de cette équation.

Supposons que $\alpha \in \mathbb{C}$ est une solution de $z^4 = c$, c'est-à-dire que : $\alpha^4 = c$.

On a :

- $(i\alpha)^4 = i^4\alpha^4 = (i^2)^2\alpha^4 = (-1)^2c = 1 \times c = c$ donc $i\alpha$ est une solution de $z^4 = c$
- $(-\alpha)^4 = (-1)^4\alpha^4 = 1 \times c = c$ donc $(-\alpha)$ est une solution de $z^4 = c$
- $(-i\alpha)^4 = (-1)^4 i^4\alpha^4 = 1 \times (i^2)^2 \times c = 1 \times (-1)^2 \times c = c$ donc $(-i\alpha)$ est une solution de $z^4 = c$

Conséquence : si on connait l'une des solutions α de $z^4 = c$ et que $\alpha \neq 0$, alors les solutions de $z^4 = c$ sont les complexes : $\alpha, i\alpha, -\alpha$ et $-i\alpha$.

Revenons à l'équation (E) : $z^4 = 28 - 96i$:

on peut « deviner » que $3-i$ est une solution de (E) :

$$(3-i)^4 = [(3-i)^2]^2 = (9-6i+i^2)^2 = (8-6i)^2 = 8^2 - 2(8)(6i) + (6i)^2$$
$$= 64 - 96i - 36 = 28 - 96i$$

et en déduire que les trois autres solutions sont :

- $i(3-i) = 3i - i^2 = 3i + 1 = 1 + 3i$
- $-(3-i) = -3 + i$
- $-i(3-i) = -(1+3i) = -1 - 3i$

On retrouve bien les quatre solutions : $3-i$, $-3+i$, $1+3i$ et $-1-3i$.