

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{N}$: $n^2 + n + 5 \mid 7n - 3$.

Exercice 2

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $5 \mid 7^n - 2^n$.

Exercice 3

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $5 \mid n(n^2 + 1)(2n^2 + 3)$.

Exercice 4

Déterminer les entiers naturels n tels que : $n + 3 \mid n^2 + 7$.

Corrigé**Exercice 1**

Résoudre dans $\mathbb{N}$: $n^2 + n + 5 \mid 7n - 3$.

Analyse

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 + n + 5 \mid 7n - 3$.

$n^2 + n + 5 > 0$ et $n^2 + n + 5$ divise $7n - 3 \neq 0$, donc : $1 \leq n^2 + n + 5 \leq 7n - 3$.

La première relation d'ordre est toujours vérifiée, concentrons-nous sur la seconde.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} n^2 + n + 5 \leq 7n - 3 &\Leftrightarrow n^2 + n + 5 - (7n - 3) \leq 0 \Leftrightarrow n^2 + n + 5 - 7n + 3 \leq 0 \Leftrightarrow n^2 - 6n + 8 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (n - 2)(n - 4) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq n \leq 4 \end{aligned}$$

Synthèse

• si $n = 2$,

alors : $n^2 + n + 5 = 2^2 + 2 + 5 = 11$, $7n - 3 = 7(2) - 3 = 11$, $11 \mid 11$ donc $n = 2$ est accepté

• si $n = 3$,

alors : $n^2 + n + 5 = 9 + 3 + 5 = 17$, $7n - 3 = 7(3) - 3 = 18$, $\text{non}(17 \mid 18)$ donc $n = 3$ est refusé

• si $n = 4$,

alors : $n^2 + n + 5 = 16 + 4 + 5 = 25$, $7n - 3 = 7(4) - 3 = 25$, $25 \mid 25$ donc $n = 4$ accepté

Conclusion : les solutions sont **2 et 4**.

Exercice 2

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $5 \mid 7^n - 2^n$.

Méthode 1 **Démonstration par récurrence**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_n : « $5 \mid 7^n - 2^n$ ».

• initialisation

$5^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$, or : $5 \mid 0$, donc P_0 est vraie

• hérédité

soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $5 \mid 7^k - 2^k$ » est vraie et montrons que P_{k+1} : « $5 \mid 7^{k+1} - 2^{k+1}$ » est vraie.

On a :

$$\begin{aligned} 7^{k+1} - 2^{k+1} &= 7 \times 7^k - 2 \times 2^k = 7 \times 7^k - 7 \times 2^k + 7 \times 2^k - 2 \times 2^k = 7 \times (7^k - 2^k) + 5 \times 2^k \\ 7^{k+1} - 2^{k+1} &= 7 \times (7^k - 2^k) + 2^k \times 5 \end{aligned}$$

Or $5 \mid 7^k - 2^k$ (H.R.) et $5 \mid 5$ donc 5 divise toute combinaison linéaire de $7^k - 2^k$ et 5, en particulier : $5 \mid 7 \times (7^k - 2^k) + 2^k \times 5$, autrement dit : $5 \mid 7^{k+1} - 2^{k+1}$ donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion :

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, 5 \mid 7^n - 2^n$.

Méthode 2 Utilisation des congruences

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $7 \equiv 2 [5]$, donc : $7^n \equiv 2^n [5]$, autrement dit : $5 | 7^n - 2^n$.

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 5 | 7^n - 2^n$$

Exercice 3

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $5 | n(n^2 + 1)(2n^2 + 3)$.

Méthode 1 :

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

Procédons par disjonction de cas suivant le reste r de la division euclidienne de n par 5.

- si $r = 0$, alors $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 5k$, donc $5 | n$, d'où : $5 | n(n^2 + 1)(2n^2 + 3)$.
- si $r = 1$, alors $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 5k + 1$;
 $2n^2 + 3 = 2(5k + 1)^2 + 3 = 2(25k^2 + 10k + 1) + 3 = 50k^2 + 20k + 5 = 5(10k^2 + 4k + 1)$
donc $5 | 2n^2 + 3$, d'où : $5 | n(n^2 + 1)(2n^2 + 3)$.
- si $r = 2$, alors $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 5k + 2$;
 $n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1)$
donc $5 | n^2 + 1$, d'où : $5 | n(n^2 + 1)(2n^2 + 3)$.
- si $r = 3$, alors $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 5k + 3$, donc :
 $n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 9 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2)$
donc $5 | n^2 + 1$, d'où : $5 | n(n^2 + 1)(2n^2 + 3)$.
- si $r = 4$, alors $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 5k + 4$, donc :
 $2n^2 + 3 = 2(5k + 4)^2 + 3 = 2(25k^2 + 40k + 16) + 3 = 50k^2 + 80k + 32 + 3$
 $= 50k^2 + 80k + 35 = 5(10k^2 + 16k + 7)$
donc $5 | 2n^2 + 3$, d'où : $5 | n(n^2 + 1)(2n^2 + 3)$.

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, 5 | n(n^2 + 1)(2n^2 + 3)$$

Méthode 2 Utilisation d'un tableau de congruence

Soit $n \in \mathbb{Z}$, utilisant un tableau de congruence modulo 5 :

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv$	0	1	4	9 $\equiv 4$	16 $\equiv 1$
$n^2 + 1 \equiv$	1	2	5 $\equiv 0$	5 $\equiv 0$	2
$2n^2 + 3 \equiv$	$2(0) + 3$ $\equiv 3$	$2(1) + 3$ $\equiv 5$ $\equiv 0$	$2(4) + 3$ $\equiv 11$ $\equiv 1$	$2(4) + 3$ $\equiv 21$ $\equiv 1$	$2(1) + 3$ $\equiv 5$ $\equiv 0$
$n(n^2 + 1)(2n^2 + 3) \equiv$	$0 \times 1 \times 3$ $\equiv 0$	$1 \times 2 \times 0$ $\equiv 0$	$2(0)(1)$ $\equiv 0$	$3(0)(1)$ $\equiv 0$	$4(2)(0)$ $\equiv 0$

Par disjonction de cas, on déduit de la dernière ligne que : $\forall n \in \mathbb{Z}, n(n^2 + 1)(2n^2 + 3) \equiv 0 [5]$
autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, 5 | n(n^2 + 1)(2n^2 + 3)$.

Exercice 4

Déterminer les entiers naturels n tels que : $n + 3 | n^2 + 7$.

Analyse

Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n + 3 | n^2 + 7$.

On a : $n + 3 | n^2 + 7$ et $n + 3 | n + 3$ donc $n + 3$ divise toute combinaison linéaire de $n^2 + 7$ et $n + 3$, en particulier : $n + 3 | 1(n^2 + 7) - n(n + 3)$, c'est-à-dire : $n + 3 | n^2 + 7 - n^2 - 3n$, autrement dit : $n + 3 | -3n + 7$.

On a : $n + 3 | -3n + 7$ et $n + 3 | n + 3$ donc $n + 3$ divise toute combinaison linéaire de $-3n + 7$ et $n + 3$, en particulier : $n + 3 | 1(-3n + 7) + 3(n + 3)$, c'est-à-dire : $n + 3 | 16$.

Or, on a $n \in \mathbb{N}$ donc $n + 3 \geq 3$, par conséquent $n + 3$ est un diviseur de 16 supérieur ou égal à 3, de tels diviseurs sont 4, 8 et 16 donc trois cas peuvent se présenter :

$$\bullet n + 3 = 4 \Leftrightarrow n = 1 \quad \bullet n + 3 = 8 \Leftrightarrow n = 5 \quad \bullet n + 3 = 16 \Leftrightarrow n = 13$$

Il y a trois candidats solutions : 1, 5 et 13.

Synthèse

• si $n = 1$

$$n + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$n^2 + 7 = 1^2 + 7 = 8$$

$4 | 8$ donc $n = 1$ est accepté

• si $n = 5$

$$n + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$n^2 + 7 = 5^2 + 7 = 32$$

$8 | 32$ donc $n = 5$ est accepté

• si $n = 13$

$$n + 3 = 13 + 3 = 16$$

$$n^2 + 7 = 13^2 + 7 = 176$$

$$176 = 11 \times 16 \text{ donc } 16 | 176$$

$n = 13$ est accepté

Conclusion

Les solutions dans $\mathbb{N}$ de $n + 3 | n^2 + 7$ sont : 1, 5 et 13.