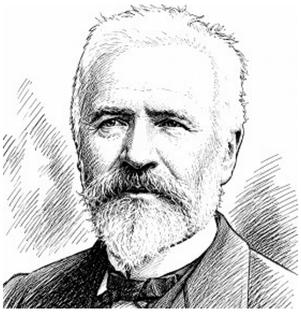
Maths XP **Contrôle $n°5$** **Mardi 19/05/2026** **Thiaude P.**
1h **Calculatrice interdite** **Total sur 20 points**



Camille JORDAN

(1838—1922)

Mathématicien français,
est à l'origine d'une méthode qui simplifie considérablement l'étude des matrices carrées.

<u>Exercice 1</u> [10 points]

On considère la matrice à coefficients réels $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, I désigne la matrice identité d'ordre 3, et on pose $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis vérifier que : $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On admet que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (B + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k$$

En déduire que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$(B + I)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

4. Déterminer la forme explicite de A^n.

<u>Exercice 2</u> [10 points]

On considère les matrices carrées à coefficients réels : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

2. Calculer : $D = P^{-1}AP$.

3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Donner la forme explicite de A^n.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note s_n la somme des coefficients de A^n.

a. Vérifier que $s_0 = 2^1$ et $s_1 = 2^3$.

b. L'affirmation suivante est-elle exacte : « $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \in \mathbb{N}$ tel que : $s_n = 2^{k_n}$ » ?

Corrigé

Exercice 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, I est la matrice identité d'ordre 3, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. **Calculer A^2 puis vérifier que : $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

   [Non rédigé] $\boldsymbol{A^2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ puis : $\boldsymbol{A^4} = A^2 \times A^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

2. **Vérifier que $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.**

   [Non rédigé] $\boldsymbol{B^2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ puis $\boldsymbol{B^3} = B \times B^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

3. **On admet que :**

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{n}} \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{k}}$$

En déduire que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a : $(B + I)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(B + I)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \ (*)$$

Procédons par disjonction de cas suivant que $n \geqslant 3$ ou bien $n \in \{0; 1; 2\}$.

<u>1^{er} cas : $n \geqslant 3$</u>

La formule du binôme de Newton donne :

$$(B + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} B^k \ (*)$$

Or, on a :

- $\binom{n}{0} B^0 = 1 \times I = I$
- $\binom{n}{1} B^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} B = \frac{n \times (n-1)!}{1 \times (n-1)!} B = nB$
- $\binom{n}{2} B^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} B^2 = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times 1 \times (n-2)!} B^2 = \frac{n(n-1)}{2} B^2$
- si $k \geqslant 3$, alors $B^k = B^{3+k-3} = B^3 B^{k-3} = 0_3 B^{k-3} = 0_3$

donc $(*)$ s'écrit :

$$(B + I)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 0_3 = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$:

$$(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{nB} + \frac{\boldsymbol{n(n-1)}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{B}^{\mathbf{2}}$$

<u>2^e cas : $n \in \{0; 1; 2\}$</u>

- pour $n = 0$, d'une part $(B + I)^0 = I$ et d'autre part $I + 0B + \frac{0(0-1)}{2} B^2 = I + 0_3 + 0_3 = I$ donc $(*)$ est vérifiée

• pour $n = 1$, d'une part, $(B+I)^1 = B + I$ et d'autre part : $I + 1B + \frac{1(1-1)}{2}B^2 = I + B = B + I$ donc $(*)$ est vérifiée

• pour $n = 2$, d'une part : $(B+I)^2 = B^2 + 2BI + I^2 = B^2 + 2B + I$ et d'autre part : $I + 2B + \frac{2(2-1)}{2}B^2 = I + 2B + B^2 = B^2 + 2B + I$ donc $(*)$ est vérifiée.

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \in \{0; 1; 2\}$:

$$\boldsymbol{(B+I)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2}$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, (B+I)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2}$$

Le fait que la question soit très guidée permet aussi d'effectuer une démonstration par récurrence.

4. Déterminer la forme explicite de A^n.

Remarquons que :

$$B + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = (B+I)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Résumons :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Pour $n = 4$, on obtient :

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{4(4-1)}{2} \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui est en accord avec l'indication sur A^4 donnée à la question **1.**

Exercice 2

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times (-4) - 1 \times 1 = -4 - 1 = -5$$

$\det(P) \neq 0$ donc P est inversible. Posons $B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$\boldsymbol{P^{-1}} = \frac{1}{\det(P)}B = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}$$

2. Vérifier que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 3-4 \\ 4+0 & 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5}+\frac{4}{5} & -\frac{4}{5}+\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5}-\frac{4}{5} & -\frac{1}{5}-\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a donc : $\boldsymbol{D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$, et c'est bien une matrice diagonale.

3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition : « $A^n = PD^nP^{-1}$ » .

• <u>initialisation</u>
D'une part $A^0 = I_2$ et d'autre part $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ donc $A^0 = PD^0P^{-1}$, P_0 est vraie.

• <u>hérédité</u>
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est vraie : $A^k = PD^kP^{-1}$ et montrons que P_{k+1} est vraie.
On a : $A^{k+1} = AA^k = APD^kP^{-1}$, or $D = P^{-1}AP$ donc $PD = AP$ puis $PDP^{-1} = A$ donc :
$APD^kP^{-1} = PDP^{-1}PD^kP^{-1} = PDI_2D^kP^{-1} = PDD^kP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$.
On a : $A^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$ donc P_{k+1} est vraie.

<u>Conclusion</u> :
Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que :$\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie, autrement dit : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}}$.

4. En déduire l'écriture explicite de A^n.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4^{n+1}}{5} & \frac{4^n}{5} \\ \frac{(-1)^n}{5} & -\frac{(-1)^n}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4^{n+1}+(-1)^n}{5} & \frac{4^n-(-1)^n}{5} \\ \frac{4^{n+1}-4(-1)^n}{5} & \frac{4^n+4(-1)^n}{5} \end{pmatrix}$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^{n+1}+(-1)^n}{5} & \frac{4^n-(-1)^n}{5} \\ \frac{4^{n+1}-4(-1)^n}{5} & \frac{4^n+4(-1)^n}{5} \end{pmatrix}}$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note s_n la somme des coefficients de A^n.

a. Vérifier que $s_0 = 2^1$ et $s_1 = 2^3$.

$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $s_0 = 1+0+0+1 = 2 = 2^1$, on a bien : $\boldsymbol{s_0 = 2^1}$.
$A^1 = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ donc $s_1 = 3+1+4+0 = 8 = 2^3$, on a bien : $\boldsymbol{s_1 = 2^3}$.

b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $k_n \in \mathbb{N}$ tel que : $s_n = 2^{k_n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^{n+1}+(-1)^n}{5} & \frac{4^n-(-1)^n}{5} \\ \frac{4^{n+1}-4(-1)^n}{5} & \frac{4^n+4(-1)^n}{5} \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}s_n &= \frac{4^{n+1}+(-1)^n}{5}+\frac{4^n-(-1)^n}{5}+\frac{4^{n+1}-4(-1)^n}{5}+\frac{4^n+4(-1)^n}{5}\\ &= \frac{4^{n+1}+(-1)^n+4^n-(-1)^n+4^{n+1}-4(-1)^n+4^n+4(-1)^n}{5}=\frac{2\times 4^{n+1}+2\times 4^n}{5}\\ &= \frac{2\times 4^n(4^1+1)}{5}=\frac{2\times (2^2)^n\times 5}{5}=2\times 2^{2n}=2^{2n+1}\end{aligned}$$

On a donc : $s_n = 2^{2n+1} = 2^{k_n}$ avec $k_n = 2n+1 \in \mathbb{N}$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, **il existe** $\boldsymbol{k_n} \in \mathbb{N}$ **tel que** $\boldsymbol{s_n = 2^{k_n}}$**, à savoir** $\boldsymbol{k_n = 2n+1}$**.**