Maths XP **Contrôle $n°1$ du Mardi 14/10/2024** Thiaude P.
50 minutes **Calculatrice interdite**

Euclide (vers 300 avant J.C.)
Plusieurs livres des Eléments d'Euclide traitent d'arithmétique.

Image : source Wikipédia.

Exercice 1 [1 point]
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de (-703) par (-4).

Exercice 2 [2 points]
Le reste de la division euclidienne par 7 d'un entier relatif a est 3.
Quel est le reste de la division euclidienne par 7 de $4a$?

Exercice 3 [3 points]
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $3|7^n - 1$.

Exercice 4 [5 points]
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $5|n(n^2-1)(n^2+1)$.

Exercice 5 [3 points]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = n^2 + n$ et $b_n = 3n + 8$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $a_n \equiv b_n \ [n+2]$.

Exercice 6 [4 points]
Déterminer les entiers relatifs n tels que : $\begin{cases} n-1|5n+4 \\ n-1|3n+2 \end{cases}$.

Exercice 7 [2 points]
Résoudre dans $\mathbb{N}$: $n^2 + 2|2n + 5$.

Corrigé

Exercice 1

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de (-703) par (-4).
La division euclidienne de 703 par 4 donne : $703 = 175 \times 4 + 3$
d'où :
$-703 = -(175 \times 4 + 3) = -175 \times 4 - 3 = -175 \times 4 - 4 + 4 - 3 = -176 \times 4 + 1$
On a : $-703 = 176 \times (-4) + 1$ avec $0 \leqslant 1 < |-4|$
donc pour la division euclidienne de (-703) par (-4) **le quotient est 176 et le reste 1**.

Exercice 2

Le reste de la div. euclidienne par 7 de $a \in \mathbb{Z}$ est 3, quel est le reste de la div. euclidienne par 7 de $4a$?

Le reste de la division euclidienne par 7 de a est 3 donc il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = 7q + 3$, d'où :
$4a = 4(7q + 3) = 7 \times 4q + 12 = 7 \times 4q + 7 + 5 = (4q + 1) \times 7 + 5$
On a : $4a = (4q + 1) \times 7 + 5$ avec $0 \leqslant 5 < 7$ donc pour la division euclidienne de $4a$ par 7 **le reste est 5**.

Exercice 3

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $3|7^n - 1$.

Méthode 1 (conseillée)

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a : $7 \equiv 1\ [3]$ donc $7^n \equiv 1^n\ [3]$ c'est-à-dire $7^n \equiv 1\ [3]$, donc : $3|7^n - 1$.
Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{3|7^n - 1}$.

Méthode 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la proposition : « $3|7^n - 1$ ».
• initialisation
$7^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $3|0$ donc P_0 est vraie.
• hérédité
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $3|7^k - 1$ » est vraie, montrons que P_{k+1} : « $3|7^{k+1} - 1$ » est vraie.
On a :
$$7^{k+1} - 1 = 7 \times 7^k - 1 = 7 \times (7^k - 1) + 7 - 1 = 7 \times (7^k - 1) + 6 = 7 \times (7^k - 1) + 2 \times 3$$
Or, $3|7^k - 1$ (H.R.) et $3|3$ donc 3 divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres, en particulier : $3|7 \times (7^k - 1) + 2 \times 3$, autrement dit : $3|7^{k+1} - 1$, autrement dit P_{k+1} est vraie.

Conclusion
Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, 3|7^n - 1$.

Exercice 4

Démontrer que, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$, on a : $\mathbf{5}|\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}^2 - \mathbf{1})(\boldsymbol{n}^2 + \mathbf{1})$.
On procède par disjonction de cas suivant le reste r de la division euclidienne de n par 5 :
• si $r = 0$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 5k$, on a alors : $5|n$ donc $5|n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$.
• si $r = 1$,alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 5k + 1$,
on a alors : $n^2 - 1 = (5k + 1)^2 - 1 = 25k^2 + 10k + 1 - 1 = 25k^2 + 10k = 5(5k^2 + 2k)$
donc $5|n^2 - 1$, d'où $5|n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$
• si $r = 2$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 5k + 2$,
on a alors : $n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1)$
donc $5|n^2 + 1$, d'où $5|n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$
• si $r = 3$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 5k + 3$,
on a alors : $n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 9 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2)$
donc $5|n^2 + 1$, d'où $5|n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$.
• si $r = 4$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 5k + 4$,
on a alors : $n^2 - 1 = (5k + 4)^2 - 1 = 25k^2 + 40k + 16 - 1 = 25k^2 + 40k + 15 = 5(5k^2 + 8k + 3)$
donc $5|n^2 - 1$, d'où $5|n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$.
Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}, \mathbf{5}|\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}^2 - \mathbf{1})(\boldsymbol{n}^2 + \mathbf{1})$.

Exercice 5

Pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, on pose : $\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{b_n} = \boldsymbol{3n+8}$, montrer que : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{a_n} \equiv \boldsymbol{b_n}\ [\boldsymbol{n+2}]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n - b_n = n^2 + n - (3n+8) = n^2 - 2n - 8 = n^2 - 2(n)(1) + (1)^2 - 1 - 8 = (n-1)^2 - 9$$
$$= (n-1)^2 - 3^2 = (n-1+3)(n-1-3) = (n+2)(n-4)$$

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a_n - b_n = k(n+2)$, à savoir $k = n-4$, donc : $n+2|a_n - b_n$ autrement dit : $\boldsymbol{a_n} \equiv \boldsymbol{b_n}\ [\boldsymbol{n+2}]$.

Exercice 6

Déterminer les entiers relatifs $\boldsymbol{n}$ tels que : $\begin{cases} \boldsymbol{n-1|5n+4} \\ \boldsymbol{n-1|3n+2} \end{cases}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant : $\begin{cases} n-1|5n+4 \\ n-1|3n+2 \end{cases}$.

Analyse

On a : $n-1|5n+4$ et $n-1|3n+2$, donc $n-1$ divise toute combinaison linéaire de $5n+4$ et $3n+2$, en particulier $n-1|3(5n+4)-5(3n+2)$, c'est-à-dire : $n-1|15n+12-15n-10$, soit : $n-1|2$.
Or, les diviseurs de 2 sont : $-2, -1, 1$ et 2 donc quatre cas seulement peuvent se présenter :
• $n-1 = -2 \Leftrightarrow n = -1$ • $n-1 = -1 \Leftrightarrow n = 0$ • $n-1 = 1 \Leftrightarrow n = 2$ • $n-1 = 2 \Leftrightarrow n = 3$
Les candidats solutions sont : -1, 0, 2 et 3.

Synthèse

• si $n = -1$
$n-1 = -1-1 = -2$
$5n+4 = 5(-1)+4 = -1$
$non(-2|-1)$
$\boldsymbol{n = -1}$ **est refusé**

• si $n = 0$
$n-1 = 0-1 = -1$
-1 divise tout entier relatif
$\boldsymbol{n = 0}$ **est accepté**

• si $n = 2$
$n-1 = 2-1 = 1$
1 divise tout entier relatif
$\boldsymbol{n = 2}$ **est accepté**

• si $n = 3$
$n-1 = 3-1 = 2$
$5n+4 = 5(3)+4 = 19$
$non(2|19)$
$\boldsymbol{n = 3}$ **est refusé**

Conclusion : le système $\begin{cases} n-1|5n+4 \\ n-1|3n+2 \end{cases}$ admet pour solutions : **0 et 2**.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{N}$: $\boldsymbol{n^2+2|2n+5}$.

Sauf pour des entiers naturels assez « petits », on va avoir $n^2+2 > 2n+5$ et $2n+5 \neq 0$ donc n^2+2 ne pourra pas diviser $2n+5$, cela nous incite à rechercher une résolution n'utilisant pas les combinaisons linéaires.

On a les équivalences : $n^2+2 \leqslant 2n+5 \Leftrightarrow n^2-2n-3 \leqslant 0 \Leftrightarrow (n+1)(n-3) \leqslant 0$ et pour $n+1 > 0$ cette dernière inéquation est équivalentes à $n-3 \leqslant 0$, c'est-à-dire $n \leqslant 3$.

Procédons par disjonctions de cas :
• si $n = 0$, alors $n^2+2 = 2$, $2n+5 = 5$, or non $(2|5)$ donc 0 n'est pas une solution
• si $n = 1$, alors $n^2+2 = 3$, $2n+5 = 7$, or non $(3|7)$ donc 1 n'est pas une solution
• si $n = 2$, alors $n^2+2 = 6$, $2n+5 = 9$, or non $(6|9)$ donc 2 n'est pas une solution
• si $n = 3$, alors $n^2+2 = 11$, $2n+5 = 11$,or $11|11$ donc 3 est une solution
• si $n > 3$, alors $n^2+2 > 2n+5$, or $2n+5 \neq 0$ donc ses diviseurs positifs sont compris au sens large entre 1 et $2n+5$ donc il est impossible que n^2+2 soit l'un d'entre eux, donc non $(n^2+2|2n+5)$ autrement dit n n'est pas une solution de $n^2+2|2n+5$

Conclusion : $n^2+2|2n+5$ admet **3 pour une unique solution dans** $\mathbb{N}$.