

► Intégration d'après bac Pondichéry 2001

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$$

On rappelle que : pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a l'implication : $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a^n \leq 1$.

a. Rechercher une primitive F_1 de $f_1 : x \mapsto (1-x)e^{-x}$ sur \mathbb{R} sous la forme $F_1(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des constantes réelles, en déduire que $I_1 = \frac{1}{e}$.

b. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$$

c. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

d. A l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

2. On considère la suite (a_n) définie par $a_1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

a. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$$

b. En déduire la limite de la suite (a_n) .

Corrigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$$

On rappelle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a l'implication : $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a^n \leq 1$.

a. Rechercher une primitive F_1 de $f_1 : x \mapsto (1-x)e^{-x}$ sur \mathbb{R} sous la forme $F_1(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des constantes réelles, en déduire que $I_1 = \frac{1}{e}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = (1-x)e^{-x} \text{ et } F_1(x) = (ax + b)e^{-x}.$$

$$\text{Rappel : } (uv)' = u'v + v'u \text{ et } (e^u)' = u'e^u$$

$$F_1'(x) = ae^{-x} + (-1)e^{-x}(ax + b)$$

$$F_1'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x}$$

$$F_1'(x) = (a - (ax + b))e^{-x}$$

$$F_1'(x) = (a - ax - b)e^{-x}$$

$$F_1'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$$

Or, dire que F_1 est une primitive de f_1 sur \mathbb{R} revient à dire que : $\forall x \in \mathbb{R}, F_1'(x) = f_1(x)$

d'où par identification :

$$\begin{cases} -a = -1 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1 - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, F_1(x) = xe^{-x}$.

F_1 est continue sur \mathbb{R} donc en particulier sur $[0; 1]$

$$I_1 = \frac{1}{1!} \int_0^1 (1-x)^1 e^{-x} dx = \int_0^1 (1-x) e^{-x} dx = \int_0^1 f_1(x) dx = [F_1(x)]_0^1 = [x e^{-x}]_0^1$$

$$= 1e^{-1} - 0e^{-0} = 1 \times \frac{1}{e} - 0 = \frac{1}{e}$$

Résumons : $I_1 = \frac{1}{e}$

b. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$.

En déduire que (I_n) est convergente et préciser sa limite.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq x \leq 1$ donc $0 \geq -x \geq -1$, $1 \geq -x + 1 \geq 0$
 autrement dit : $0 \leq 1 - x \leq 1$ donc : $0 \leq (1 - x)^n \leq 1$ puis en multipliant par $e^{-x} > 0$:
 $0 \leq (1 - x)^n e^{-x} \leq e^{-x}$, puis en intégrant dans l'ordre croissant des bornes :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$0 \leq \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$\frac{1}{n!} \times 0 \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx \quad \left(\frac{1}{n!} > 0\right)$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x} dx$$

c. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = -\frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{1}{e}$$

donc l'inégalité obtenue en **b.** s'écrit aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geq n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$ puis par limite d'un quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$,
 puis :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \right] = 0$$

Résumons :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \right] = 0 \end{cases}$$

donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

d. À l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx$$

$$\begin{aligned} \text{On pose : } \quad u(x) &= (1-x)^{n+1} & v'(x) &= e^{-x} \\ u'(x) &= -(n+1)(1-x)^n & v(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

u' et v' sont continues sur $[0; 1]$ donc on peut utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u(x)v'(x)dx &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\ \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-x}dx &= [-(1-x)^{n+1}e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)(1-x)^ne^{-x}dx \\ \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-x}dx &= -(1-1)^{n+1}e^{-1} + (1-0)^{n+1}e^{-0} - (n+1) \int_0^1 (1-x)^ne^{-x}dx \\ \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-x}dx &= -0 + 1 \times 1 - (n+1) \times n! \times \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^ne^{-x}dx \\ \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-x}dx &= 1 - (n+1)! I_n \end{aligned}$$

Puis en multipliant chaque membre par $\frac{1}{(n+1)!}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-x}dx &= \frac{1}{(n+1)!} (1 - (n+1)! I_n) \\ I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} - I_n \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

2. On considère la suite (a_n) définie par $a_1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la proposition P_n : « $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$ »

• initialisation

D'une part : $a_1 = 0$,

d'autre part :

$$\frac{1}{e} + (-1)^1 I_1 = \frac{1}{e} + (-1) \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0$$

donc : P_1 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que P_k est vraie et montrons que P_{k+1} est vraie.

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$a_k = \frac{1}{e} + (-1)^k I_k$$

Puis :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^k I_k + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^k I_k + (-1) \times \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{e} + (-1)^k \left(I_k + \frac{-1}{(k+1)!} \right) = \frac{1}{e} + (-1)^k \left(I_k - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \frac{1}{e} + (-1)^k (-I_{k+1}) \\ &= \frac{1}{e} + (-1)^{k+1} I_{k+1} \end{aligned}$$

On a donc : $a_{k+1} = \frac{1}{e} + (-1)^{k+1} I_{k+1}$, P_{k+1} est donc vraie.

Conclusion :

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie ;

autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$.

b. En déduire la limite de la suite (a_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, puis en multipliant par $I_n \geq 0$: $-I_n \leq (-1)^n I_n \leq I_n$

puis en ajoutant $\frac{1}{e}$ à chaque membre : $\frac{1}{e} - I_n \leq \frac{1}{e} + (-1)^n I_n \leq \frac{1}{e} + I_n$

autrement dit : $\frac{1}{e} - I_n \leq a_n \leq \frac{1}{e} + I_n$.

Or, on a montré que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} - I_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} + I_n \right) = \frac{1}{e}$$

Résumons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{e} - I_n \leq a_n \leq \frac{1}{e} + I_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} - I_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} + I_n \right) = \frac{1}{e} \end{array} \right.$$

donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{e}$$