Exercice 1 [Suite numérique : généralités]

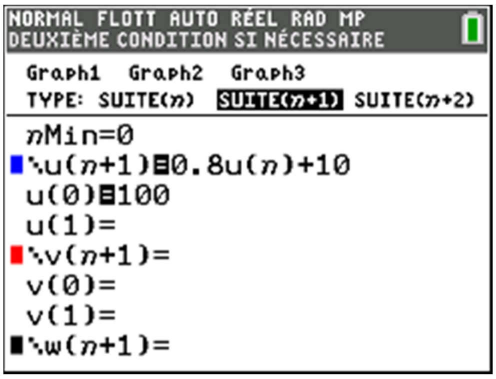
On pose $u_0 = 100$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,8u_n + 10$.

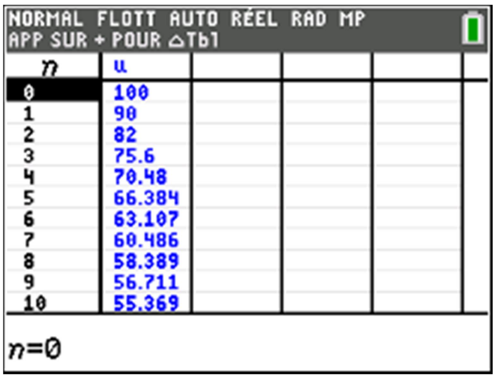
1. **Calculer u_1 et u_2, en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.**
2. **Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 50 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 100$.**
3. **En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.**
4. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - \ell$.**
   a. **Calculer v_0.**
   b. **Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.**
   c. **Exprimer v_n en fonction de n, $n \in \mathbb{N}$.**
   d. **En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 50(1 + 0,8^n)$.**
   e. **En utilisant la forme explicite de u_n retrouver la limite de la suite (u_n).**
5. **Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que : $|u_{n_0} - 50| < 0,1$.**

Corrigé

Exercice 1

On pose $u_0 = 100$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,8u_n + 10$.





n	u
0	100
1	90
2	82
3	75.6
4	70.48
5	66.384
6	63.107
7	60.486
8	58.389
9	56.711
10	55.369

1. **Calculer u_1 et u_2, en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.**
   Pour $n = 0$, on obtient : $u_1 = 0,8u_0 + 10 = 0,8 \times 100 + 10 = 90$
   pour $n = 1$, on obtient : $u_2 = 0,8u_1 + 10 = 0,8 \times 90 + 10 = 72 + 10 = 82$
   $u_1 - u_0 = 90 - 100 = -10$ et $u_2 - u_1 = 82 - 90 = -8$
   On constate que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
   $$\frac{u_1}{u_0} = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} \quad et \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{82}{90} = \frac{41}{45}$$
   On constate que $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) **n'est pas géométrique**.
2. **Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 50 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 100$.**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la proposition « $50 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 100$ ».

   • initialisation
   On a : $50 \leqslant 90 \leqslant 100 \leqslant 100$, c'est-à-dire : $50 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 100$, P_0 est vraie.
   • hérédité
   Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est vraie et montrons que P_{k+1} est vraie.
   On a : $50 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 100$, puis en multipliant par $0,8 > 0$:

$$0{,}8 \times 50 \leqslant 0{,}8 \times u_{k+1} \leqslant 0{,}8 \times u_k \leqslant 0{,}8 \times 100$$
$$40 \leqslant 0{,}8u_{k+1} \leqslant 0{,}8u_k \leqslant 80$$
puis en ajoutant 10 :
$$40 + 10 \leqslant 0{,}8u_{k+1} + 10 \leqslant 0{,}8u_k + 10 \leqslant 80 + 10$$
$$50 \leqslant 0{,}8u_{k+1} + 10 \leqslant 0{,}8u_k + 10 \leqslant 90\ (*)$$
Or, $90 \leqslant 100$, $0{,}8u_{k+1} + 10 = u_{k+2}$ et $0{,}8u_k + 10 = u_{k+1}$, donc on déduit de $(*)$ que :
$50 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 100$, P_{k+1} est donc vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, 50 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 100}$.

3. **En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.**

Il résulte de la question précédente que :

• $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante,

• $\forall n \in \mathbb{N}, 50 \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par la constante 50.

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc d'après le théorème de convergence monotone elle est convergente.

On note $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de la suite (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 10\ (**)$.

D'une part on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{N\to+\infty} u_N = \ell$.

d'autre part, par limite d'un produit et d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}8u_n + 10) = 0{,}8\ell + 10$.

Par passage à la limite de l'égalité $(**)$ on obtient :
$$\ell = 0{,}8\ell + 10 \Leftrightarrow \ell - 0{,}8\ell = 10 \Leftrightarrow 0{,}2\ell = 10 \Leftrightarrow \ell = \frac{10}{0{,}2} \Leftrightarrow \ell = 50$$
Résumons : $\boldsymbol{\ell = 50}$.

4. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - 50$.**

   a. **Calculer v_0.**

   $\boldsymbol{v_0} = u_0 - 50 = 100 - 50 = \mathbf{50}$

   b. **Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.**

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 0{,}8u_n + 10 - 50 = 0{,}8u_n - 50 = 0{,}8(u_n - 50) = 0{,}8v_n$$
   $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0{,}8v_n$ et 0,8 est une constante donc la suite (v_n) **est géométrique de raison $\mathbf{0{,}8}$**.

   c. **Exprimer v_n en fonction de n, $n \in \mathbb{N}$.**

   Soit $n \in \mathbb{N}$,(v_n) est géométrique donc $v_n = v_0 \times q^n$, or $v_0 = 50$ et $q = 0{,}8$

   donc : $v_n = 50 \times 0{,}8^n$. Conclusion : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 50 \times 0{,}8^n}$.

   d. **En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 50(1 + 0{,}8^n)$.**

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :$v_n = u_n - 50$, autrement dit : $u_n = v_n + 50$.

   Or, $v_n = 50 \times 0{,}8^n$, donc $u_n = 50 \times 0{,}8^n + 50$.

   Conclusion : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 50 \times 0{,}8^n + 50}$.

   e. **En utilisant la forme explicite de u_n retrouver la limite de la suite (u_n).**

   On a : $-1 < 0{,}8 < 1$, or si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$

   puis par limite d'un produit et d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} (50 \times 0{,}8^n + 50 = 50$,

   c'est-à-dire : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 50}$.

5. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que : $|u_{n_0} - 50| < 0,1$.

Avec les notions de l'exercice on a les équivalences :

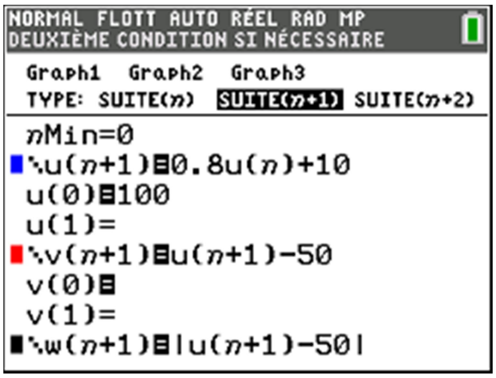
$$|u_n - 50| < 0,1 \Leftrightarrow |50 \times 0,8^n + 50 - 50| < 0,1 \Leftrightarrow |50 \times 0,8^n| < 0,1 \ (***)$$

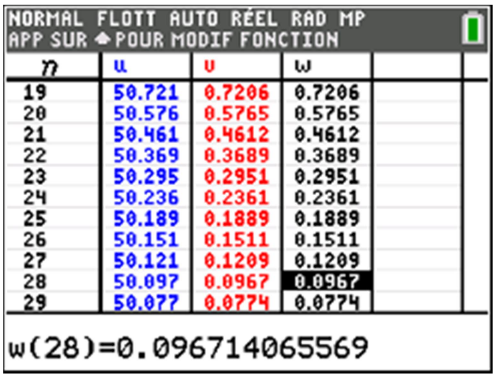
Or, pour tout $x \geq 0$, on a : $|x| = x$ et $50 \times 0,8^n \geq 0$ donc $(***)$ s'écrit aussi :

$$50 \times 0,8^n < 0,1 \Leftrightarrow 0,8^n < \frac{0,1}{50} \Leftrightarrow 0,8^n < 0,002 \Leftrightarrow \ln(0,8^n) < \ln(0,002)$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(0,8) < \ln(0,002) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,002)}{\ln(0,8)} \quad (\ln(0,8) < 0)$$

A la calculatrice on obtient : $\frac{\ln(0,002)}{\ln(0,8)} \approx 27,85$ et comme le premier entier immédiatement supérieur à 27,85 est 28, on en déduit : $\boldsymbol{n_0 = 28}$.





NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR ♣ POUR MODIF FONCTION

n	u	v	w
19	50.721	0.7206	0.7206
20	50.576	0.5765	0.5765
21	50.461	0.4612	0.4612
22	50.369	0.3689	0.3689
23	50.295	0.2951	0.2951
24	50.236	0.2361	0.2361
25	50.189	0.1889	0.1889
26	50.151	0.1511	0.1511
27	50.121	0.1209	0.1209
28	50.097	0.0967	0.0967
29	50.077	0.0774	0.0774

w(28)=0.096714065569

<u>Complément</u>

Le programme Python suivant permet de retrouver n_0 :

```
U=100
n=0
while abs(U-50)>=0.1:
    n=n+1
    U=0.8*U+10
print("n0=",n)
```

Exercice 2 [Suite numérique : formules de la somme]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 2n + 5 + 7 \times 0,5^n$.

Définir deux suites (v_n) et (w_n) définies à partir du rang 0 telles que :

(v_n) est arithmétique, (w_n) est géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + w_n$.

Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 + \cdots + u_n = (n+1)(n+5) + 14(1 - 0,5^{n+1})$.

Corrigé

Posons, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$: $\boldsymbol{v_n = 2n + 5}$ et $\boldsymbol{w_n = 7 \times 0,5^n}$.

• Vérifions que (v_n) est arithmétique

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $uv_{n+1} = 2(n+1) + 5 = 2n + 2 + 5 = 2n + 5 + 2 = v_n + 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 2$ et 2 est une constante donc (v_n) est arithmétique de raison 2.

• Vérifions que (w_n) est géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $w_{n+1} = 7 \times 0{,}5^{n+1} = 7 \times 0{,}5^n \times 0{,}5^1 = w_n \times 0{,}5$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 0{,}5 \times w_n$ et 0,5 est une constante donc (w_n) est géométrique de raison 0,5.

• Vérifions que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2n + 5 + 7 \times 0{,}5^n = v_n + w_n$; on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + w_n$.

• Justifions que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 + \cdots + u_n = (n+1)(n+5) + 14(1 - 0{,}5^{n+1})$.

On a : $u_0 + \cdots + u_n = v_0 + w_0 + \cdots + v_n + w_n = v_0 + \cdots + v_n + w_0 + \cdots + w_n$.

D'une part la formule de la somme des premiers termes d'une suite arithmétique donne :

$$v_0 + \cdots + v_n = \frac{(v_0 + v_n)(n+1)}{2} = \frac{(2(0) + 5 + 2n + 5)(n+1)}{2} = \frac{(2n+10)(n+1)}{2}$$
$$= \frac{2(n+5)(n+1)}{2} = (n+1)(n+5)$$

D'autre part la formule de la somme des premiers termes d'une suite géométrique donne :

$$w_0 + \cdots + w_n = w_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 7 \times 0{,}5^0 \times \frac{1 - 0{,}5^{n+1}}{1 - 0{,}5} = 7 \times \frac{1 - 0{,}5^{n+1}}{0{,}5} = \frac{7}{0{,}5}(1 - 0{,}5^{n+1})$$
$$= 14(1 - 0{,}5^{n+1})$$

donc : $v_0 + \cdots + v_n + w_0 + \cdots + w_n = (n+1)(n+5) + 14(1 - 0{,}5^{n+1})$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_0 + \cdots + u_n = (n+1)(n+5) + 14(1 - 0,5^{n+1})}$.

Exercice 3 [probabilité : variable gain algébrique, espérance mathématique, variance]
Un sac contient 2 billes vertes et 8 billes rouges.
Un joueur extrait simultanément deux billes de ce sac : s'il obtient les deux billes vertes alors le jeu s'arrête et il gagne 10€, sinon il remet les deux billes dans le sac puis extrait à nouveau simultanément deux billes : s'il obtient les deux billes vertes alors il gagne 5€ et le jeu s'arrête, sinon il perd 5€ et le jeu s'arrête.
On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en €.

1. **Donner la loi de probabilité de G.**
2. **Montrer que l'espérance de gain du joueur est environ $-4,45$€ arrondie au centime.**
3. **Si le joueur décide de jouer 500 parties, quelle somme d'argent peut-il « espérer » gagner ou perdre arrondie à la centaine d'euros ?**

<u>Corrigé</u>

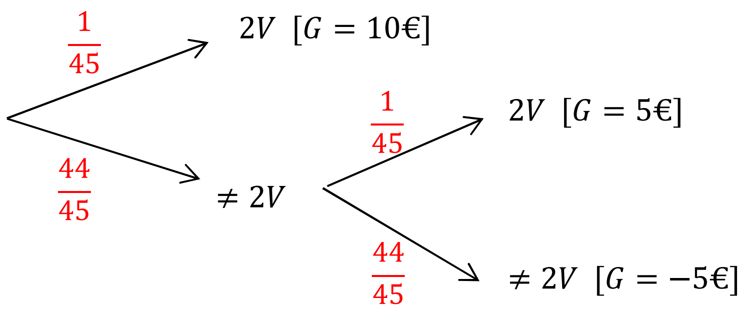
1. **Donner la loi de probabilité de G.**

On extrait simultanément 2billes d'un ensemble en contenant 10, il y a donc :

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2!\,8!} = \frac{90}{2} = 45$$

choix possibles, et un seul ($\binom{2}{2} = 1$…) correspondant à « obtenir les deux billes vertes ».

En utilisant le principe « la somme des probabilités partant d'un même nœud de l'arbre vaut 1 », on obtient l'arbre de probabilité :



La loi de probabilité de G est donnée par le tableau à deux lignes :

g_i	-5	5	10
$P(G = g_i)$	$\frac{44}{45} \times \frac{44}{45}$	$\frac{44}{45} \times \frac{1}{45}$	$\frac{1}{45}$

2. **Montrer que l'espérance de gain du joueur est environ $-4,45$€ arrondie au centime.**

$$E(G) = \sum_{i=1}^{3} P(G = g_i)g_i = \frac{44}{45} \times \frac{44}{45} \times (-5) + \frac{44}{45} \times \frac{1}{45} \times 5 + \frac{1}{45} \times 10 = -\frac{1802}{405} \approx -4{,}45$$

L'espérance mathématique de gain du joueur est bien : $\approx$ **$-4,45$€, arrondi au centime.**

3. **500 partie …**

Pour 500 parties jouées :

$$500 \times E(G) = 500 \times \left(-\frac{1802}{405}\right) \approx -2225$$

Pour 500 parties le joueur peut « espérer » perdre **environ 2 200€ arrondie à la centaine d'euro**.

Exercice 4 [probabilité : loi binomiale, seuil]

Un archer est très régulier dans ses performances. Lorsqu'il décoche une flèche vers une cible d'entrainement fixe très éloignée il a 20% de chance de l'atteindre.

1. **Lundi, il décoche 5 flèches vers la cible :**
   a. **Quelle est la probabilité que 3 flèches exactement atteignent la cible ?**
   b. **Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre-elles atteigne la cible ?**
2. **Combien au minimum de flèches l'archer doit-il décocher mardi pour que, ce jour-là, la probabilité qu'il atteigne la cible soit supérieure ou égale à $0,9$?**

Corrigé

1. **Lundi, il décoche 5 flèches vers la cible :**
   a. **Quelle est la probabilité que 3 flèches exactement atteignent la cible ?**
   On considère l'épreuve décocher une flèche vers la cible, elle admet deux issues :
   — le succès : la flèche atteint la cible, de probabilité $p = 0{,}2$
   — l'échec : la flèche rate la cible, de probabilité $1 - p = 0{,}8$
   Lorsque l'on répète avec indépendance cette épreuve de Bernoulli, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}2$ donc, pour tout $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, on a :
   $$P(X = k) = \binom{5}{k} 0{,}2^k 0{,}8^{5-k}$$
   L'événement « 3 flèches exactement atteignent la cible » est l'événement $X = 3$.
   Or, on a : $P(X = 3) = \binom{5}{3} 0{,}2^3 0{,}8^2 = \frac{32}{625} = 0{,}051\,2$
   La probabilité que 3 flèches exactement atteignent la cible est : $0,051\,2$.

   b. **Déterminer la probabilité qu'au moins l'une d'entre-elles atteigne la cible.**
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$
   or, $P(X = 0) = \binom{5}{0} 0{,}2^0 0{,}8^{5-0} = 1 \times 1 \times 0{,}8^5 = 0{,}327\,68$
   donc : $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}32768 = 0{,}672\,32$.
   La probabilité qu'au moins une flèche atteigne la cible est : $0,672\,32$.

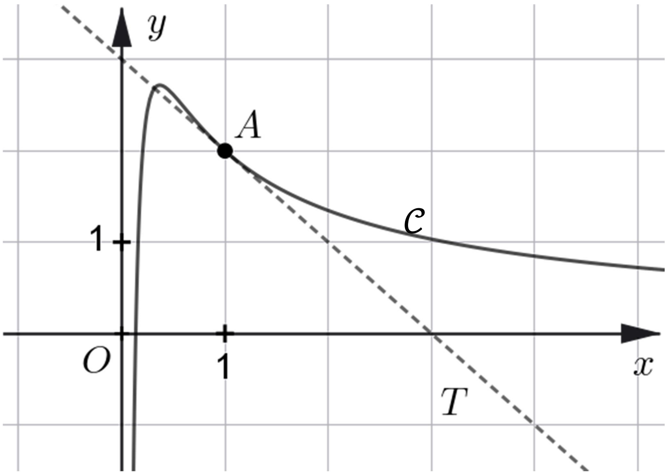
2. **Combien au minimum de flèches l'archer doit-il décocher mardi pour que, ce jour-là, la probabilité qu'il atteigne la cible soit supérieure ou égale à $0,9$?**
   Pour n flèches, $P(X = k) = \binom{n}{k} 0{,}2^k 0{,}8^{n-k}$ avec $k \in \{0; 1; \dots; n\}$.
   $$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} 0{,}2^0 0{,}8^n = 1 - 0{,}8^n$$
   $$1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow -0{,}8^n \geqslant -0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}8^n \leqslant 0{,}1 \Leftrightarrow \ln(0{,}8^n) \leqslant \ln(0{,}1) \Leftrightarrow n \ln(0{,}8) \leqslant \ln(0{,}1)$$
   Puis en divisant par $\ln(0{,}8) < 0$, on obtient : $n \geqslant \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}8)}$
   Or, $\frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}8)} \approx 10{,}3$ donc **l'archer devra décocher au moins 11 flèches**.

Exercice 5 [étude de fonction : ln, tangente, convexité]

Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2+\ln(x)}{x}$$

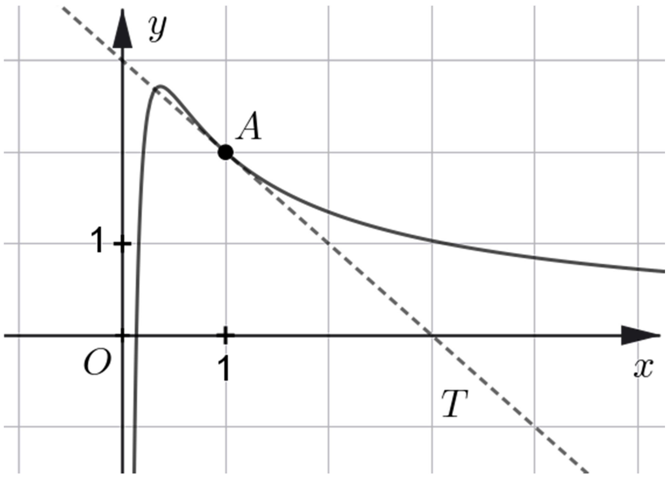
On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthonormé du plan ainsi que la tangente à cette courbe au point A d'abscisse 1 :



1. Déterminer les limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$ puis interpréter pour $\mathcal{C}$.
2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T.
4. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale en un point S dont on précisera les coordonnées.
   Un élève affirme « S appartient à T » : a-t-il raison ?
5. Justifier que, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)$ et $-1-\ln(x)$ ont même signe puis dresser le tableau de variation de f.
6. Etudier la convexité de f.

Corrigé

$$\forall x\in]0;+\infty[, f(x)=\frac{2+\ln(x)}{x}$$



1. **Déterminer les limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$ puis interpréter pour $\mathcal{C}$.**

$f(x)=\dfrac{2+\ln(x)}{x}$

• $x\to 0^+$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ $(cours)$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}[2+\ln(x)]=-\infty$ puis par limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2+\ln(x)}{x}=-\infty$$

autrement dit : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$**, donc** **la droite d'équation $x=0$ (c'est-à-dire l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à $\mathcal{C}$.**

• $x\to+\infty$

Pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a : $f(x)=\dfrac{2+\ln(x)}{x}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ $(cours)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ $(croissance\ comparée)$ donc par limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$, autrement dit : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, donc **la droite d'équation $y=0$ (c'est-à-dire l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.**

2. **Calculer $f'(x)$.**

$f(x)=\dfrac{2+\ln(x)}{x}$

Rappel : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ et $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=\dfrac{\left(0+\frac{1}{x}\right)x-1(2+\ln(x))}{x^2}$

$f'(x)=\dfrac{1-2-\ln(x)}{x^2}$

$\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}}$

3. **Déterminer l'équation réduite de la tangente T.**

La tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 admet pour équation : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

Or, on a :

$$f'(1)=\frac{-1-\ln(1)}{1^2}=\frac{-1-0}{1}=-1\ \text{ et }\ f(1)=\frac{2+\ln(1)}{1}=\frac{2+0}{1}=2$$

On obtient : $y=-1(x-1)+2$, puis : $y=-x+1+2$, et enfin : $y=-x+3$.

<u>Conclusion</u> **: la tangente T admet pour équation réduite $y=-x+3$.**

4. **Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale en un point S dont on précisera les coordonnées. Un élève affirme « S appartient à T » : a-t-il raison ?**

• calcul des coordonnées de S

Il y a une tangente horizontale lorsque la dérivée s'annule, or pour $x\in]0;+\infty[$ on a les équivalences :

$$\frac{-1-\ln(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow -1-\ln(x)=0\Leftrightarrow -1-\ln(x)=0\Leftrightarrow -\ln(x)=1\Leftrightarrow \ln(x)=-1$$
$$\Leftrightarrow \ln(x)=\ln(e^{-1})\Leftrightarrow x=e^{-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale en un seul point, S, d'abscisse $x_S=\dfrac{1}{e}$.

Or, $S\in\mathcal{C}$, on a : $y_S=f(x_S)$, donc :

$$y_S = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2+\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = \frac{2+\ln(e^{-1})}{\frac{1}{e}} = \big(2+(-1)\big)\times\frac{e}{1} = 1\times e = e$$

Finalement : $\boldsymbol{S\left(\frac{1}{e}\,;e\right)}$.

• le point S appartient-il à T ?

On a d'une part : $-x_S+3 = -\frac{1}{e}+3 \approx 2{,}63$ et d'autre part : $y_S = e \approx 2{,}71$ donc $y_S \neq -x_S+3$

par conséquent **le point S n'appartient pas à T**.

5. **Justifier que, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)$ et $-1-\ln(x)$ ont même signe puis dresser le tableau de variation de f.**

On a obtenu à la question 2. que, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{-1-\ln(x)}{x^2}$, or un carré est toujours positif donc $f'(x)$ et son numérateur $(-1-\ln(x))$ ont même signe.

Cherchons pour quelles valeurs de x on a : $-1-\ln(x)>0$; on a les équivalences :

$$-1-\ln(x)>0 \Leftrightarrow -\ln(x)>1 \Leftrightarrow \ln(x)<-1 \Leftrightarrow \ln(x)<\ln(e^{-1}) \Leftrightarrow x<e^{-1} \Leftrightarrow x<\frac{1}{e}$$

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f.

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

6. Etudier la convexité de f.

f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$, calculons $f''(x)$.

$$f'(x)=\frac{-1-\ln(x)}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{\left(0-\frac{1}{x}\right)x^2-2x(-1-\ln(x))}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{-x+2x+2x\ln(x)}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{x+2x\ln(x)}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{x(1+2\ln(x))}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{1+2\ln(x)}{x^3}$$

$\forall x\in]0;+\infty[$, $x^3>0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de son numérateur $1+2\ln(x)$.

Pour $x\in]0;+\infty[$ on a les équivalences :

$$1+2\ln(x)>0 \Leftrightarrow 2\ln(x)>-1 \Leftrightarrow \ln(x)>-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(x)>\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow x>e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt{e}}$$

On en déduit :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

f est concave sur $\left]0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ **f est convexe sur $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\,;\,+\infty\right[$**

Remarque :

f change de convexité en $\frac{1}{\sqrt{e}}$

donc le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

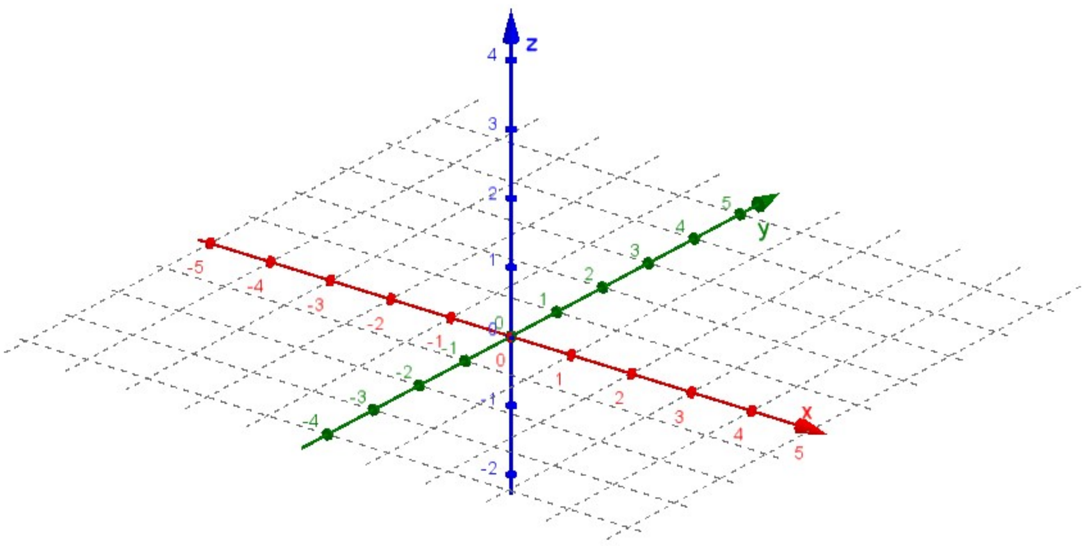
Exercice 6 [espace : vecteurs, orthogonalité, droite, équation d'un plan]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x - y + 2z - 4 = 0$, on note A, B et C les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec $(O; \vec{\imath})$, $(O; \vec{\jmath})$ et $(O; \vec{k})$ respectivement, $\mathcal{D}$ est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + t \end{cases}$$

1. Déterminer les coordonnées de A, B et C, les placer sur la figure.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont-ils orthogonaux ?
3. Le triangle ABC est-il isocèle en C ?
4. La droite $\mathcal{D}$ est-elle orthogonale au plan $\mathcal{P}$?
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection E de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$, le placer sur la figure.
6. Etudier la position relative de B, C et E.
7. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$, que peut-on en déduire pour le triangle ABE ?

Figure exercice 6 à compléter



Corrigé

repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, $\mathcal{P} : x - y + 2z - 4 = 0$, $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + t \end{cases}$

A, B et C les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec $(O;\vec{\imath})$, $(O;\vec{\jmath})$ et $(O;\vec{k})$ respectivement

1. **Déterminer les coordonnées de A, B et C, les placer sur la figure.**

• coordonnées de A

$A \in \mathcal{P} : x - y + 2z - 4 = 0$ donc $x_A - y_A + 2z_A - 4 = 0$, or $A \in (O;\vec{\imath})$ donc $y_A = z_A = 0$

Lorsqu'un point appartient à un axe du repère, toutes ses autres coordonnées sont nulles.

Donc : $x_A - 0 + 2(0) - 4 = 0$, qui donne : $x_A = 4$, donc finalement : $\boldsymbol{A(4;0;0)}$.

• coordonnées de B

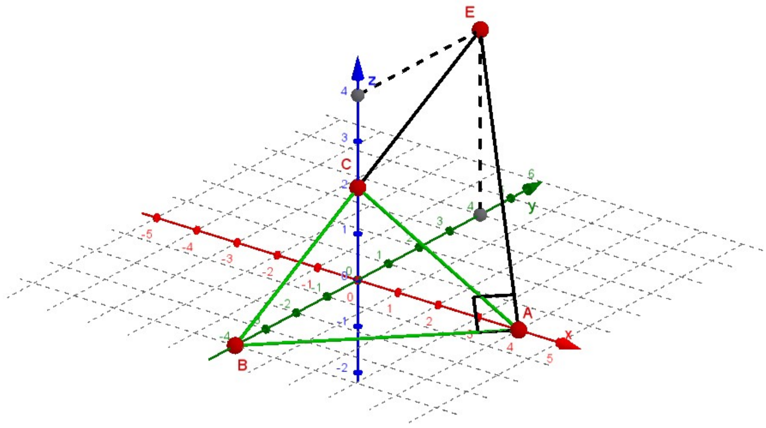
$B \in \mathcal{P} : x - y + 2z - 4 = 0$ donc $x_B - y_B + 2z_B - 4 = 0$, or $B \in (O;\vec{\jmath})$ donc $x_B = z_B = 0$

Donc : $0 - y_B + 2(0) - 4 = 0$, qui donne : $y_B = -4$ donc finalement : $\boldsymbol{B(0;-4;0)}$.

• coordonnées de C

$C \in \mathcal{P} : x - y + 2z - 4 = 0$ donc $x_C - y_C + 2z_C - 4 = 0$, or $C \in (O;\vec{k})$ donc $x_C = y_C = 0$

Donc : $0 - 0 + 2z_C - 4 = 0$, qui donne : $z_C = 2$, donc finalement : $\boldsymbol{C(0;0;2)}$.



2. **Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont-ils orthogonaux ?**

Rappelons que : $A(4;0;0)$, $B(0;-4;0)$ et $C(0;0;2)$.

• $\overrightarrow{CA}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \\ z_A - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 0-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{CB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \\ z_B - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ -4-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Résumons : $\boldsymbol{\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}$ et $\boldsymbol{\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}}$.

Le repère est orthonormé donc on peut utiliser l'expression du produit scalaire dans un tel repère :

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (4)(0) + (0)(-4) + (-2)(-2) = 0 + 0 + 4 = 4$$

On constate que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \neq 0$ donc **$\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas orthogonaux**.

3. **Le triangle ABC est-il isocèle en C ?**

Le repère est orthonormé donc on peut appliquer la formule de la norme.

$$CA = \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{(4)^2 + (0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 0 + 4} = \sqrt{20}$$
$$CB = \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{0 + 16 + 4} = \sqrt{20}$$

On constate que $CA = CB$ donc le triangle $\boldsymbol{ABC}$ **isocèle en** $\boldsymbol{C}$.

4. La droite $\mathcal{D}$ est-elle orthogonale au plan $\mathcal{P}$?

Dire que $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$ revient à dire qu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est colinéaire à un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Or, la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ montre que $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$

et l'équation cartésienne donnée de $\mathcal{P}$ montre que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Rappelons que deux vecteurs sont colinéaires lorsque les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls.

Or : $\begin{vmatrix}-1 & 1\\2 & -1\end{vmatrix} = (-1)(-1) - (1)(2) = 1 - 2 = -1 \neq 0$,

donc : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ **n'est pas orthogonale à** $\boldsymbol{\mathcal{P}}$.

Autre méthode

On a $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}\cdot\overrightarrow{CA} = (-1)(4) + (2)(0) + (1)(-2) = -4 + 0 - 2 = -6 \neq 0$.

On constate que $\vec{u}\cdot\overrightarrow{CA} \neq 0$ donc $\vec{u}$ n'est pas orthogonal $\overrightarrow{CA}$ qui est un vecteur du plan $\mathcal{P}$, or un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est orthogonal à TOUS les vecteurs de ce plan (définition) donc $\vec{u}$ n'est pas un vecteur normal à $\mathcal{P}$, par conséquent : $\mathcal{D}$ n'est pas orthogonale à $\mathcal{P}$.

5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection $\boldsymbol{E}$ de $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, le placer sur la figure.

Les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ s'obtiennent en résolvant:

$$\begin{cases} x = 1 - t\\ y = 2 + 2t\\ z = 3 + t\\ x - y + 2z - 4 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t\\ y = 2 + 2t\\ z = 3 + t\\ 1 - t - (2 + 2t) + 2(3 + t) - 4 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t\\ y = 2 + 2t\\ z = 3 + t\\ t - 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 1\\ y = 2 + 2(1)\\ z = 3 + 1\\ t = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0\\ y = 4\\ z = 4\\ t = 1\end{cases} \qquad \text{d'où : } \boldsymbol{E(0;4;4)}.$$

6. Etudier la position relative de $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{E}$.

Rappelons que : $B(0;-4;0)$, $C(0;0;2)$ et $E(0;4;4)$, on a :

$$\frac{x_B + x_E}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 = x_C \qquad \frac{y_B + y_E}{2} = \frac{-4+4}{2} = 0 = y_C \qquad \frac{z_B + z_E}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 = z_C$$

donc : $C\left(\frac{x_B+x_E}{2};\frac{y_B+y_E}{2};\frac{z_B+z_E}{2}\right)$, par conséquent : $\boldsymbol{C}$ **est le milieu de** $[\boldsymbol{BE}]$.

Autre méthode : coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ et de $\overrightarrow{BE}$ puis, on montre que $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$.

7. Calculer $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}$, que peut-on en déduire pour le triangle $\boldsymbol{ABE}$?

Rappelons que $A(4;0;0)$, $B(0;-4;0)$ et $E(0;4;4)$, on a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-4\\-4-0\\0-0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-4\\0\end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0-4\\4-0\\4-0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix}$$

puis : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = (-4)(-4) + (-4)(4) + (0)(4) = 16 - 16 + 0 = 0$,

Résumons : $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{AE}} = \boldsymbol{0}$, on en déduit que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AE}$ donc que le triangle $\boldsymbol{ABE}$ **est rectangle en** $\boldsymbol{A}$.

Exercice 7 [équation différentielle avec second membre]

On considère les équations différentielles (E) : $y' - 2y = xe^x$ et (E_0) : $y' - 2y = 0$.

1. **Donner la solution générale de (E_0).**
2. **Déterminer une solution particulière de (E) sous de la forme $x \mapsto (ax + b)e^x$ où a et b sont deux constantes réelles.**
3. **Résoudre (E).**

Corrigé

(E) : $y' - 2y = xe^x$ et (E_0) : $y' - 2y = 0$

1. **Donner la solution générale de (E_0).**
   (E_0) s'écrit : $y' = 2y$, c'est une équation homogène $y' = ay$ avec $a = 2$, dont la solution générale s'écrit $x \mapsto Ce^{ax}$, donc **la solution générale de (E_0) est $x \mapsto Ce^{2x}$**
   où C est une constante réelle.

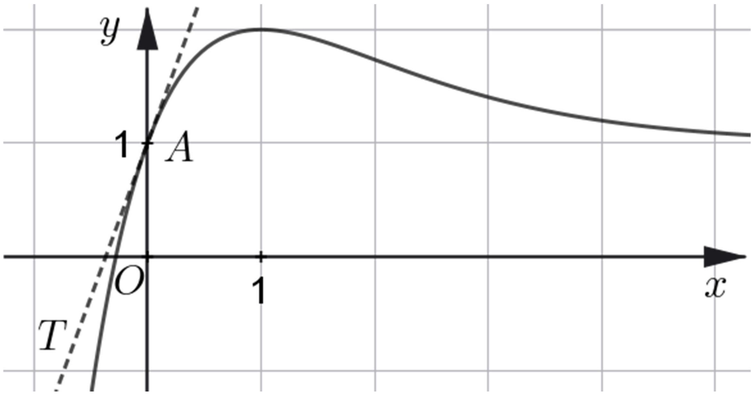
2. **Déterminer une solution particulière de (E) sous de la forme $x \mapsto (ax + b)e^x$ où a et b sont deux constantes réelles.**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $y(x) = (ax + b)e^x$. Dire que y est une solution particulière de (E) signie que : $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) = xe^x$.
   $y(x) = (ax + b)e^x$
   Rappel : $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^x)' = e^x$
   $y'(x) = ae^x + e^x(ax + b) = \big(a + (ax + b)\big)e^x = (ax + a + b)e^x$
   On a alors les équivalences, $x \in \mathbb{R}$:
   $$y'(x) - 2y(x) = xe^x \Leftrightarrow (ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x$$
   $$\Leftrightarrow [ax + a + b - 2(ax + b)]e^x = xe^x \Leftrightarrow (ax + a + b - 2ax - 2b)e^x = xe^x$$
   $$\Leftrightarrow (-ax + a - b)e^x = xe^x \Leftrightarrow -ax + a - b = x \ \ (\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0)$$
   D'où, par identification : $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$.
   La solution particulière de (E) cherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto (-x - 1)e^x$.

3. **Résoudre (E).**
   Règle : la solution générale d'une équation différentielle complète s'écrit comme somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète.

   Donc la solution générale de (E) est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boldsymbol{y(x) = Ce^{2x} + (-x - 1)e^x}$
   où C est une constante réelle.

Exercice 8 **[fonction exponentielle]**

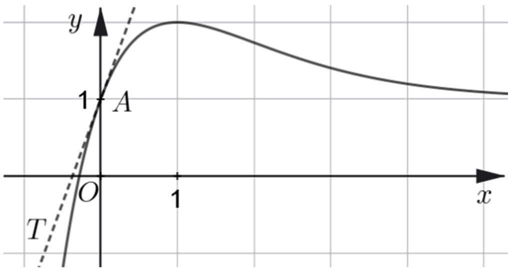
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x+1} + 1$, $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan, A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse nulle et T la tangente à $\mathcal{C}$ en A :



1. **Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette dernière.**
2. **On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.**
3. **Donner l'équation réduite de T.**
4. **Etudier la position relative de T et $\mathcal{C}$.**

Corrigé

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xe^{-x+1} + 1$, A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse nulle et T la tangente à $\mathcal{C}$ en A :



1. **Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette dernière.**

• $x \to -\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+1) = +\infty$ donc par limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x+1} = -\infty$

puis : $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{-x+1} + 1) = -\infty$, autrement dit : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$.

• $x \to +\infty$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = xe^{-x}e^{1} + 1 = \frac{x}{e^x} \times e + 1 = \frac{1}{\frac{e^x}{x}} \times e + 1$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $(croissance\ comparée)$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$

puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}} \times e + 1\right) = 1$, autrement dit : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.

On en déduit que **la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.**

2. Calculer $f'(x)$, dresser le tableau de variation de f.

$f(x) = xe^{-x+1} + 1$

Rappels : $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^u)' = u'e^u$

$f'(x) = 1e^{-x+1} + (-1)e^{-x+1}x + 0$

$f'(x) = e^{-x+1}(1 - x)$

$f'(x) = (-x + 1)e^{-x+1}$

• $-x + 1 = 0 \Leftrightarrow -x = -1 \Leftrightarrow x = 1$, règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine »

• $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x+1} > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x+1$		$+$	0	$-$	
e^{-x+1}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Sens de variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

$f(1) = 1e^{-1+1} + 1 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

3. Donner l'équation réduite de T.

La tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse nulle admet pour équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Or, $f'(0) = (-0 + 1)e^{-0+1} = 1e^1 = e$ et $f(0) = 0e^{-0+1} + 1 = 0 + 1 = 1$, on obtient :

$y = e(x - 0) + 1$ c'est-à-dire : $y = ex + 1$.

Résumons : **la tangente T admet pour équation réduite $y = ex + 1$.**

4. Etudier la position relative de T et $\mathcal{C}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - (ex + 1)$, le signe de $h(x)$ donne la position relative de $\mathcal{C}$ et T.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}, h(x) = xe^{-x+1} + 1 - (ex + 1) = xe^{-x+1} - ex = x(e^{-x+1} - e)$.

Cherchons pour quelles valeurs de x on a $e^{-x+1} - e > 0$; on a les équivalences :

$e^{-x+1} - e > 0 \Leftrightarrow e^{-x+1} > e \Leftrightarrow e^{-x+1} > e^1 \Leftrightarrow -x + 1 > 1 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{-x+1} - e$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$-$	

$h(x)$ est toujours négatif ou nul et s'annule pour $x = 0$ (uniquement) donc : **$\mathcal{C}$ est strictement en dessous de T sauf en leur unique point commun $A(0; 1)$.**

Exercice 9 **[équation différentielle $y' = ay + b$]**

Déterminer la solution de $y' = 3y + 6$ dont la courbe représentative passe par $A(1;2)$.

Corrigé

$(E) : y' = 3y + 6$ est de la forme $y' = ay + b$ où $a \neq 0$, avec $a = 3$ et $b = 6$, dont la solution générale s'écrit $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, donc la solution générale de $y' = 3y + 6$ s'écrit $x \mapsto Ce^{3x} - \frac{6}{3}$, c'est-à-dire : $x \mapsto Ce^{3x} - 2$, C constante réelle. On cherche la solution y_0 pour laquelle $y_0(1) = 2$, ce qui s'écrit : $Ce^{3(1)} - 2 = 2$, c'est-à-dire : $Ce^3 = 4$, soit : $C = 4e^{-3}$, donc en notant y_0 la solution cherchée :

$$y_0(x) = 4e^{-3}e^{3x} - 2 = 4e^{-3+3x} - 2 = 4e^{3x-3} - 2$$

Résumons : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{y_0(x) = 4e^{3x-3} - 2}$.

Exercice 10 **[valeurs intermédiaires, encadrement, valeur exacte]**

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f(x) = e^{2x} - 4e^x - 5}$.

1. **Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, dresser le tableau de variation de f.**
2. **Montrer l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1;2]$ puis donner un encadrement de α d'amplitude $0,001$.**

Complément : déterminer la valeur exacte de α.

Corrigé

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x) = e^{2x} - 4e^x - 5}$

1. **Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, dresser le tableau de variation de f.**

   $f(x) = e^{2x} - 4e^x - 5$

   Rappel : $(e^u)' = u'e^u$

   $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x - 0$

   $f'(x) = e^x(2e^x - 4)$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

   Cherchons pour quelles valeurs de x on a : $2e^{2x} - 4 > 0$; on a les équivalences :

   $2e^x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2e^x > 4 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln(2)} \Leftrightarrow x > \ln(2)$

   Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f.

x	$-\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$
e^x	$+$		$+$
$2e^x - 4$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Sens de variation de f	$\searrow$	-9	$\nearrow$

$f(\ln(2)) = e^{2\ln(2)} - 4e^{\ln(2)} - 5$
$= \left(e^{\ln(2)}\right)^2 - 4e^{\ln(2)} - 5$
$= (2)^2 - 4 \times 2 - 5$
$= 4 - 8 - 5$
$= -9$

2. **Montrer l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1;2]$ puis donner un encadrement de α d'amplitude $0,001$.**

   • f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[1;2]$

   • f est strictement croissante donc strictement monotone sur $[\ln(2); +\infty[$, or $[1;2] \subset [\ln(2); +\infty[$ donc f est strictement monotone sur $[1;2]$

   • $f(1) \approx -8{,}48 < 0$ et $f(2) \approx 20{,}04$

Résumons :

f est continue et strictement monotone sur $[1;2]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout k compris entre $f(1)$ et $f(2)$ l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[1;2]$, en particulier pour $k=0$, **l'équation $\boldsymbol{f(x)=0}$ admet une unique solution $\boldsymbol{\alpha}$ dans $[\mathbf{1};\mathbf{2}]$**.

A l'aide de la calculatrice, on obtient successivement :

$f(1{,}6)\approx -0{,}28<0 \; et \; f(1{,}7)\approx 3{,}07>0$ donc $1{,}6<\alpha<1{,}7$

$f(1{,}60)\approx -0{,}28<0$ et $f(1{,}61)\approx 0{,}02>0$ donc $1{,}60<\alpha<1{,}61$

$f(1{,}609)\approx -0{,}013<0$ et $f(1{,}610)\approx 0{,}017>0$ donc $\boldsymbol{1{,}609<\alpha<1{,}610}$

Complément : déterminer la valeur exacte de α.

$e^{2x}-4e^x-5=0 \Leftrightarrow (e^x)^2-4e^x-5=0$, en posant $X=e^x$ cette équation devient : $X^2-4X-5=0$

$\Leftrightarrow (X-2)^2-4-5=0 \Leftrightarrow (X-2)^2-3^2=0 \Leftrightarrow (X-2-3)(X-2+3)=0 \Leftrightarrow (X-5)(X+1)=0$

$\Leftrightarrow X-5=0 \; ou \; X+1=0 \Leftrightarrow X=5 \; ou \; X=-1$

si $X=5$ on obtient : $e^x=5 \Leftrightarrow e^x=e^{\ln(5)} \Leftrightarrow x=\ln(5)$

si $X=-1$ on obtient : $e^x=-1$ impossible

Conclusion : $\boldsymbol{\alpha=\ln(5)}$.

Cette méthode permet d'affirmer que l'équation $f(x)=0$ n'a qu'une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11 **[espace, orthogonalité]**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé : $A(1;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(2;1;1)$.

1. **Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.**
2. **Montrer que les trois points A, B, C définissent un plan.**

Dans toute la suite, on note $\mathcal{P}$ le plan défini par les trois points A, B, C.

3. **Déterminer a et c sachant que $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.**
4. **Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.**
5. **On considère :**

$$E(2;0;4), F\left(0;\frac{1}{2};3\right) \text{ et } G(3;-4;0)$$

   a. **La droite (EF) est-elle orthogonale à $\mathcal{P}$?**

   b. **La droite (EG) est-elle parallèle à $\mathcal{P}$?**

Corrigé

repère orthonormé, $A(1;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(2;1;1)$

1. **Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.**

   $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ -1-1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

   Résumons : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. **Montrer que les trois points A, B, C définissent un plan.**

   Les points A, B et C définissent un plan si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires.

   Règle : deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls.

   Or, on a : $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 - 1 \times (-2) = 2 \neq 0$.

   L'un au moins des déterminants 2×2 extraits est non nul donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires, autrement dit : **A, B, C définissent un plan**.

Dans toute la suite, on note $\mathcal{P}$ le plan défini par les trois points A, B, C.

3. **Déterminer a et c sachant que $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.**

   $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de $\mathcal{P}$.
   On est dans un repère orthonormé donc on peut utiliser l'expression du produit scalaire dans un tel repère.

On a :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = (a)(0) + (1)(-2) + (c)(-1) = 0 - 2 - c = -2 - c$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = (a)(1) + (1)(0) + (c)(-2) = a + 0 - 2c = a - 2c$$

On a donc : $\begin{cases} -2 - c = 0 \\ a - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ a = 2(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ c = -2 \end{cases}$.

Résumons : $\boldsymbol{a = -4}$ et $\boldsymbol{c = -2}$, donc $\boldsymbol{\vec{n}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$.

4. **Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.**

$M(x; y; z)$

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ $(*)$, or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 3 \end{pmatrix}$, donc $(*)$ s'écrit :

$$(-4)(x-1) + (1)(y-1) + (-2)(z-3) = 0 \Leftrightarrow -4x + 4 + y - 1 - 2z + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow -4x + y - 2z + 9 = 0$$

Résumons : **$\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne $\boldsymbol{-4x + y - 2z + 9 = 0}$.**

<u>autre méthode</u> :

Rappel : si $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à un plan et A est un point de ce plan alors ce plan admet pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

$\vec{n}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et $A(1; 1; 3)$ est un point de $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $(-4)x + 1y + (-2)z + d = 0$, avec $d = -(-4)1 - 1(1) - (-2)3 = 4 - 1 + 6 = 9$, c'est-à-dire : $\boldsymbol{-4x + y - 2z + 9 = 0}$.

Rappelons qu'un plan admet une infinité d'équations cartésiennes se déduisant l'une de l'autre en multipliant chaque membre par une constante non nulle, ainsi, par exemple, $8x - 2y + 4z - 18 = 0$ est une autre équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

5. **On considère : $\boldsymbol{E(2; 0; 4)}$, $\boldsymbol{F\left(0; \frac{1}{2}; 3\right)}$ et $\boldsymbol{G(3; -4; 0)}$.**

   a. **La droite (EF) est-elle orthogonale à $\mathcal{P}$?**

   Dire que (EF) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ revient à dire qu'un vecteur directeur de (EF) est colinéaire au vecteur $\vec{n}$, donc que $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 0 - 2 \\ \frac{1}{2} - 0 \\ 3 - 4 \end{pmatrix}$ i.e. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   Or,

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = (-2)(1) - (-4)\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + 2 = 0$$
$$\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (-2)(-2) - (-4)(-1) = 4 - 4 = 0$$
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)(-2) - (1)(-1) = -1 + 1 = 0$$

   Les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls donc $\overrightarrow{EF}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, autrement dit $\boldsymbol{(EF) \perp \mathcal{P}}$.

Autre méthode

Dire que (EF) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ revient à dire qu'un vecteur directeur de (EF) est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$, donc que $\overrightarrow{EF}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Rappelons que : $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-2\\ \frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\ -2\\ -1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$

On a :

• $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AB} = (-2)(0) + \left(\frac{1}{2}\right)(-2) + (-1)(-1) = 0 - 1 + 1 = 0$

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ donc : $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{AB}$.

• $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC} = (-2)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(0) + (-1)(-2) = -2 + 0 + 2 = 0$

$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ donc : $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{AC}$.

Résumons : $\overrightarrow{EF}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de $\mathcal{P}$ donc : $\boldsymbol{\overrightarrow{EF} \perp \mathcal{P}}$.

b. La droite $(\boldsymbol{EG})$ est-elle parallèle au plan $\boldsymbol{\mathcal{P}}$?

Rappelons que : $E(2;0;4)$, $G(3;-4;0)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}3-2\\ -4-0\\ 0-4\end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\ -4\\ -4\end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{EG}\cdot\vec{n} = (1)(-4) + (-4)(1) + (-4)(-2) = -4 - 4 + 8 = 0$.

$\overrightarrow{EG}\cdot\vec{n} = 0$ donc $\overrightarrow{EG} \perp \vec{n}$ par conséquent : $(\boldsymbol{EG}) \mathbin{/\!/} \boldsymbol{\mathcal{P}}$.

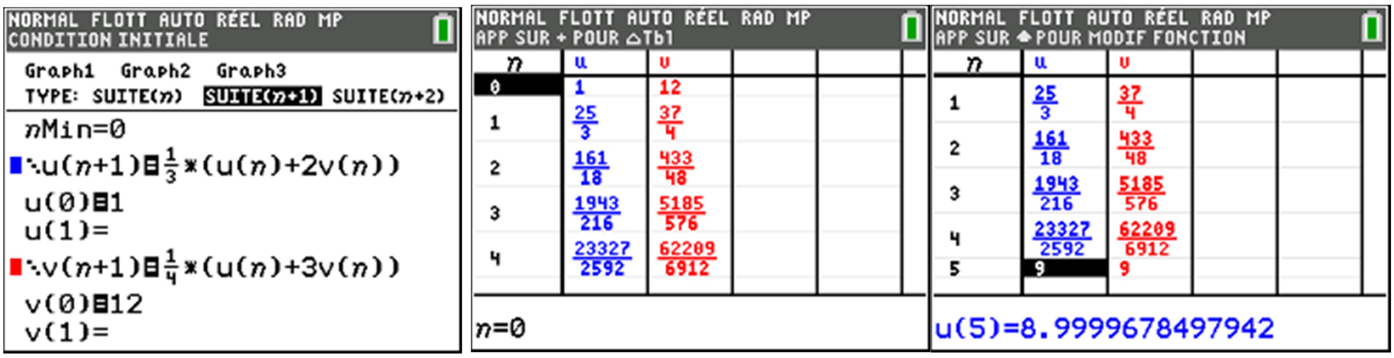
Exercice 12 [suites imbriquées]

$u_0 = 1, v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$

1. Pour tout entier naturel n on pose : $a_n = v_n - u_n$.
   a. Montrer que (a_n) est géométrique à termes positifs et préciser sa raison.
   b. Déterminer la limite de la suite (a_n).
2. a. Montrer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.
3. Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite ℓ.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que (t_n) est une suite constante, en déduire ℓ.

Corrigé

$u_0 = 1, v_0 = 12$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$



1. **Pour tout entier naturel n on pose : $a_n = v_n - u_n$.**
   a. **Montrer que (a_n) est géométrique à termes positifs et préciser sa raison.**
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$a_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)u_n + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)v_n$$
$$= -\frac{1}{12}u_n + \frac{1}{12}v_n = \frac{1}{12}(v_n - u_n) = \frac{1}{12}a_n$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{12}a_n$ et $\frac{1}{12}$ est une constante donc **(a_n) est géométrique de raison $\frac{1}{12}$**.
   $a_0 = v_0 - u_0 = 12 - 1 = 11$ donc $a_0 > 0$
   Le premier terme de (a_n) est strictement positif et la raison de la suite géométrique (a_n) est strictement positive donc la suite **(a_n) est à termes strictement positifs**.

   b. **Déterminer la limite de la suite (a_n).**
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 \times q^n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$. On a : $-1 < \frac{1}{12} < 1$, or si : $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$,
   donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[11\left(\frac{1}{12}\right)^n\right] = 0$ par conséquent $\mathbf{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0}$.

2. a. **Montrer que (u_n) est croissante.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) - u_n = \left(\frac{1}{3} - 1\right)u_n + \frac{2}{3}v_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n = \frac{2}{3}(v_n - u_n) = \frac{2}{3}a_n > 0$$

Résumons : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ donc $(\boldsymbol{u_n})$ **est (strictement) croissante**.

b. **Montrer que (v_n) est décroissante.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - v_n = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}v_n = -\frac{1}{4}(v_n - u_n) = -\frac{1}{4}a_n < 0$$

Résumons : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n < 0$ donc $(\boldsymbol{v_n})$ **est (strictement) décroissante**.

c. **En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

• (u_n) est croissante donc u_n est supérieur ou égal au premier terme u_0 : $u_0 \leqslant u_n$

• (a_n) est à termes tous positifs et $a_n = v_n - u_n$ donc $v_n \geq u_n$, autrement dit $u_n \leqslant v_n$

• (v_n) est décroissante donc v_n est inférieur ou égal au premier terme v_0 : $v_n \leqslant v_0$

Il résulte des trois points précédents que : $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0}$.

3. **Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite ℓ.**

Il résulte des inégalités démontrées en 2., « $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ » que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_0$, donc la suite (u_n) est majorée par la constante v_0.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone **elle est convergente**.

De même, il résulte des inégalité de 2. que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leqslant v_n$ donc la suite (v_n) est minorée par la constante u_0.

La suite (v_n) décroissante et minorée donc d'après le théorème de convergence monotone **elle est convergente**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = v_n - u_n$ donc par passage à la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$,

or $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc : $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Les suites $(\boldsymbol{u_n})$ **et** $(\boldsymbol{v_n})$ **ont donc même limite finie $\boldsymbol{\ell}$**.

4. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que (t_n) est une suite constante, en déduire ℓ.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3 \times \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) + 8 \times \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$$
$$= 3u_n + 8v_n = t_n$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n$ autrement dit $(\boldsymbol{t_n})$ **est une suite constante**.

On a : $t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 3(1) + 8 \times 12 = 3 + 96 = 99$, or (t_n) est constante donc : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 99$,
or, $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = 3u_n + 8v_n$ donc : $\forall n \in \mathbb{N}, 99 = 3u_n + 8v_n$, puis par passage à la limite :
$99 = 3\ell + 8\ell$, autrement dit : $11\ell = 99$, c'est-à-dire : $\boldsymbol{\ell = 9}$.