Préparation bac primitives

Thiaude P.

Exercice 01

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-2x+3)e^{-x}$.
Déterminer les constantes réelles a et b sachant que g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax+b)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Dire g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ revient à dire que $g' = f$ sur $\mathbb{R}$.
Calculons $g'(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (ax+b)e^{-x}$
Rappels : $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^u)' = u'e^u$
$g'(x) = a \times e^{-x} + (-e^{-x}) \times (ax+b)$
$g'(x) = ae^{-x} - e^{-x}(ax+b)$
$g'(x) = \big(a - (ax+b)\big)e^{-x}$
$g'(x) = (a - ax - b)e^{-x}$
$g'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f(x)$ donc :
$\forall x \in \mathbb{R}, (-ax + a - b)e^{-x} = (-2x+3)e^{-x}$ puis par identification :
$\begin{cases} -a = -2 \\ a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$
On a donc :$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (2x-1)e^{-x}$.
Ne pas oublier de vérifier avec la calculatrice !
On en déduit que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \mapsto (2x-1)e^{-x} + k$$

avec k constante réelle arbitraire.

Exercice 02

Soit f définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x-1}$$

1. **Déterminer trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout $x \in\,]1\,;\,+\infty[$:**

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

2. **En déduire les primitives de f sur $]1\,;\,+\infty[$.**

Corrigé

Soit f définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x-1}$$

1. **Pour tout $x \in\,]1\,;\,+\infty[$:**

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

Pour tout $x \in\,]1\,;\,+\infty[$, on a :

$$ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)}{x-1} + \frac{c}{x-1} = \frac{ax^2 - ax + bx - b + c}{x-1}$$
$$= \frac{ax^2 + (-a+b)x + (-b+c)}{x-1}$$

Or, pour tout $x \in\,]1\,;\,+\infty[$:

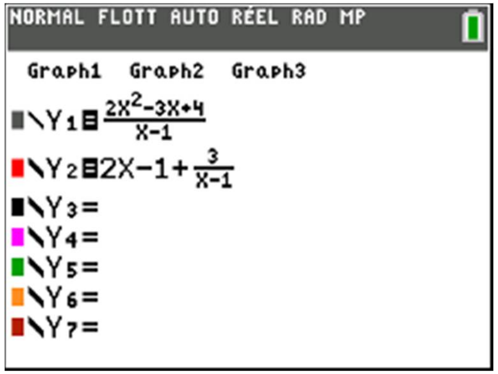
$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x-1}$$

d'où par identification :

$$\begin{cases} a = 2 \\ -a + b = -3 \\ -b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ -2 + b = -3 \\ -b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ -(-1) + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

Résumons : $\boldsymbol{a = 2, b = -1}$ **et** $\boldsymbol{c = 3}$.

Vérification



Les courbes se superposent bien.

2. **En déduire les primitives de f sur $]1\,;\,+\infty[$.**

Il résulte de la question précédente que, pour tout $x \in\,]1\,;\,+\infty[$:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x-1} = 2x - 1 + 3 \times \frac{1}{x-1}$$

Posons $u(x) = x - 1$, d'où $u'(x) = 1$

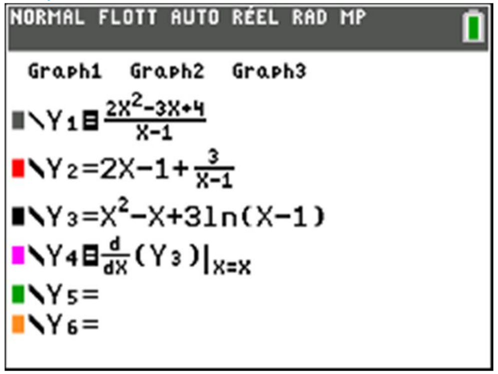
donc :

$$f(x) = 2x - 1 + 3 \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Or, les primitives de $\frac{u'}{u}$, $u > 0$, sont les fonctions $\ln u + k$
donc, en notant F une primitive de f sur $]1\,;\,+\infty[$ on a :
$F(x) = x^2 - x + 3 \times \ln\big(u(x)\big) + k$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{x} \in\ ]\mathbf{1}\,;\,+\infty[, \boldsymbol{F(x) = x^2 - x + 3\ln(x-1)}$.

Ne pas oublier de vérifier avec la calculatrice !



Les courbes se superposent bien (lorsque $x > 1$)

Exercice 03

Pour tout réel x, on pose :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}}$$

1. **Montrer qu'il existe deux constantes a et b, à préciser, telles que :**

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \times \frac{e^x}{e^x + 1} + b \times \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}}$$

2. **En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.**

Corrigé

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}$$

1. **Montrer qu'il existe deux constantes a et b, à préciser, telles que :**

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \times \frac{e^x}{e^x + 1} + b \times \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}}$$

Pour tout réel x, on a :

$$a \times \frac{e^x}{e^x + 1} + b \times \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} + \frac{be^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^{2x} + ae^x + be^x}{(e^x)^2 + 2(e^x)(1) + 1^2} = \frac{ae^{2x} + (a + b)e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}$$

En comparant avec l'écriture donnée de $f(x)$ on obtient par identification :

$$\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2 + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Résumons $a = 2$ et $b = 1$ donc :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \times \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}}$$

2. **En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.**

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \times \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Posons $u(x) = e^x + 1$, d'où $u'(x) = e^x$.

$$f(x) = 2 \times \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{u(x)}{\big(u(x)\big)^2}$$

Or, une primitive de $\frac{u'}{u}$, $u > 0$, est $\ln u + k$ et une primitives de $\frac{u}{u^2}$ est $-\frac{1}{u} + k$ donc, en notant F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ on a :

$$F(x) = 2 \times \ln\big(u(x)\big) - \frac{1}{u(x)} + k$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{F(x) = 2\ln(e^x + 1) - \frac{1}{e^x + 1} + k}$$

Exercice 04

Déterminer les primitives de f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{e^{7x}}{\sqrt{e^{7x}+3}}}$$

Corrigé

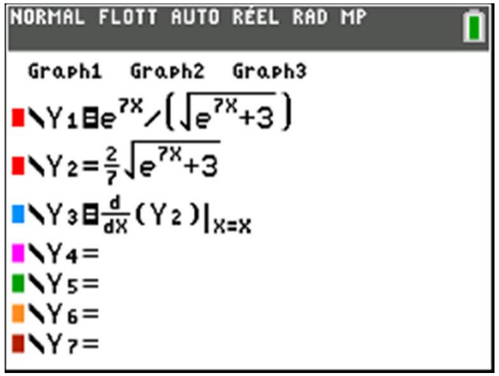
Posons $u(x)=e^{7x}$, d'où $u'(x)=7e^{7x}$.

$$f(x)=\frac{2}{7}\times\frac{7e^{7x}}{2\sqrt{e^{2x}+3}}$$

$$f(x)=\frac{2}{7}\times\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Or, une primitive de $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u>0$ est $\sqrt{u}+k$ donc, en notant F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ on a : $F(x)=\frac{2}{7}\times\sqrt{u(x)}+k$, donc finalement :

$$\boldsymbol{\forall x\in\mathbb{R}, F(x)=\frac{2}{7}\sqrt{e^{7x}+3}+k}$$



Les courbes se superposent bien.

Exercice 05

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+1)^2e^x$.
Pour a, b et c constantes réelles, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{g(x)=(ax^2+bx+c)e^x}$$

1. **Exprimer $g'(x)$ en fonction de a, b et c (on donnera une forme factorisée).**
2. **Déterminer a, b et c pour que g sont une primitive de f sur $\mathbb{R}$.**
3. **Déterminer la primitive F_0 de f sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $F_0(0)=0$.**

Corrigé

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^2e^x \text{ et } g(x)=(ax^2+bx+c)e^x$$

1. **Exprimer $g'(x)$ en fonction de a, b et c.**

$g(x)=(ax^2+bx+c)e^x$

Rappel : $(uv)'=u'v+v'u$ et $(e^x)'=e^x$

$g'(x)=(2ax+b)e^x+e^x(ax^2+bx+c)$
$g'(x)=(2ax+b+ax^2+bx+c)e^x$
$g'(x)=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$
Conclusion : $\boldsymbol{\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x}$.

2. **Déterminer a, b et c pour que g soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.**

Dire que g et une primitive de f sur $\mathbb{R}$ revient à dire que $g'=f$ sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel x :

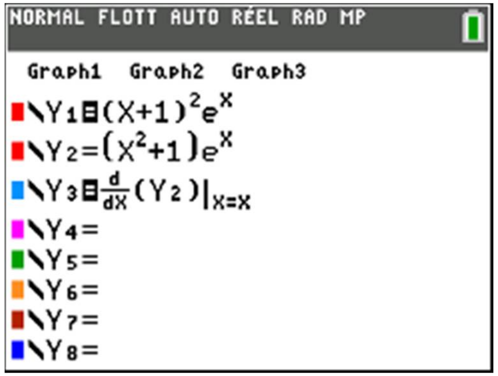
$$(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x=(x+1)^2e^x$$
$$(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x=(x^2+2x+1)e^x$$

Par identification :

$$\begin{cases} a=1\\ 2a+b=2\\ b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1\\ 2+b=2\\ b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1\\ b=0\\ c=1\end{cases}$$

Conclusion : $a=1$, $b=0$ et $c=1$.
On a donc : $\boldsymbol{\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=(x^2+1)e^x}$.

Vérification



Les courbes se superposent bien.

3. Il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que, $\forall x\in\mathbb{R}, F_0(x)=(x^2+1)e^x+k$.

Or, $F_0(0)=0$ donc : $(0^2+1)e^0+k=0\Leftrightarrow 1\times 1+k=0\Leftrightarrow k=-1$
Conclusion : $\boldsymbol{\forall x\in\mathbb{R}, F_0(x)=(x^2+1)e^x-1}$.