Exemple de calcul de limites sans ln

Thiaude P.

01. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{5x}$

Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{e^{2x}}{5x} = \frac{e^{2x}}{2x}\times\frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}\times\frac{e^{2x}}{2x}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ $(cours)$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x} = \lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X} = +\infty\ (croisances\ comparées)$$

puis par limite d'un produit :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\frac{e^{2x}}{2x}\right) = +\infty$$

autrement dit :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}}{5x}\right) = +\infty$$

<u>autre méthode</u>

On pose $X = 2x$, d'où : $x = \frac{X}{2}$, $x \to +\infty$ implique $X \to +\infty$

On a :

$$\frac{e^{2x}}{5x} = \frac{e^{2\frac{X}{2}}}{5\left(\frac{X}{2}\right)} = \frac{e^X}{\frac{5}{2}X} = \frac{2}{5}\cdot\frac{e^X}{X}$$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^X}{X} = +\infty$ $(croisances\ comparées)$ puis, comme $\frac{2}{5} > 0$:

$$\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\frac{e^X}{X}\right) = +\infty$$

<u>Conclusion</u> :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}}{5x}\right) = +\infty$$

02. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}}{2x}$

Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{e^{x+1}}{2x} = \frac{e^x\times e^1}{2x} = \frac{e\times e^x}{2\times x} = \frac{e}{2}\times\frac{e^x}{x}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$ $(croissances\ comparées)$ et $\frac{e}{2} > 0$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{2}\times\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$$

<u>Conclusion</u> :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}}{2x} = +\infty$$

03. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$

Pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{x^2}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = +\infty$ $(croissances\ comparées)$ donc par limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0^+$$

<u>Conclusion</u> :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0^+$$

04. $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{0,8x}$

Posons $X = 0,8x$ d'où $x = \frac{X}{0,8}$, $x \to -\infty$ implique $X \to -\infty$.

On a :

$$xe^{0,8x} = \frac{X}{0,8} e^{0,8\frac{X}{0,8}} = \frac{X}{0,8} e^{X} = \frac{1}{0,8} Xe^{X}$$

Or : $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^{X} = 0$ (croissances comparées) donc : $\lim\limits_{X \to -\infty} \left(\frac{1}{0,8} Xe^{X}\right) = 0.$

<u>Conclusion</u> :

$$\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} xe^{0,8x} = 0}$$

05. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$

Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$e^x - x^3 = x^3 \left(\frac{e^x}{x^3} - 1\right)$$

On a d'une part : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ $(croissances\ comparées)$ donc par limite d'une différence :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^3} - 1\right) = +\infty \ (*)$$

et d'autre part on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ $(**)$

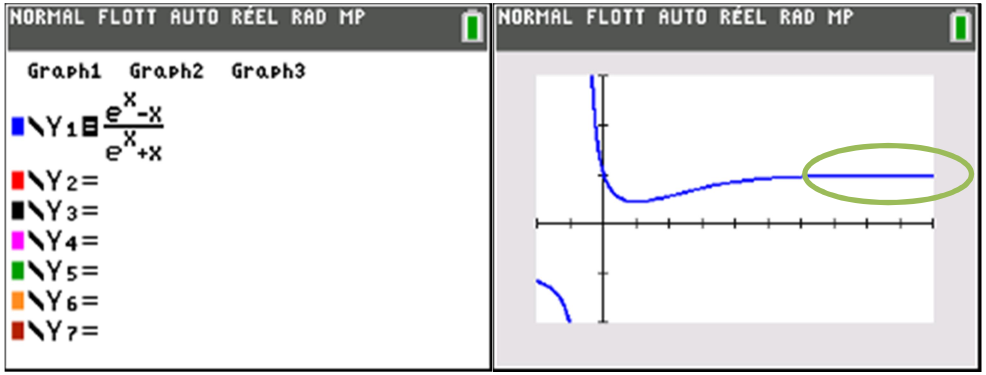
donc par limite d'un produit, il résulte de $(*)$ et $(**)$ que :

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \left(\frac{e^x}{x^3} - 1\right) = +\infty$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty}$$

06. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{e^x + x}$



Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{e^x - x}{e^x + x} = \frac{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{\frac{e^x}{x}}}{1 + \frac{1}{\frac{e^x}{x}}}$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $(croissances\ comparées)$ donc par limite d'un quotient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0^+$$

puis par limite d'une somme, d'une différence et d'un quotient :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{\frac{e^x}{x}}}{1 + \frac{1}{\frac{e^x}{x}}} = 1$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{e^x + x} = 1}$$

07. $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{x^3e^{2x}}$

Posons $X = 2x$, d'où $x = \frac{X}{2}$, $x \to -\infty$ implique $X \to -\infty$.

On a :

$$x^3e^{2x} = \left(\frac{X}{2}\right)^3 e^{2\frac{X}{2}} = \frac{X^3}{2^3}\,e^X = \frac{X^3}{8}e^X = \frac{1}{8}\,X^3e^X$$

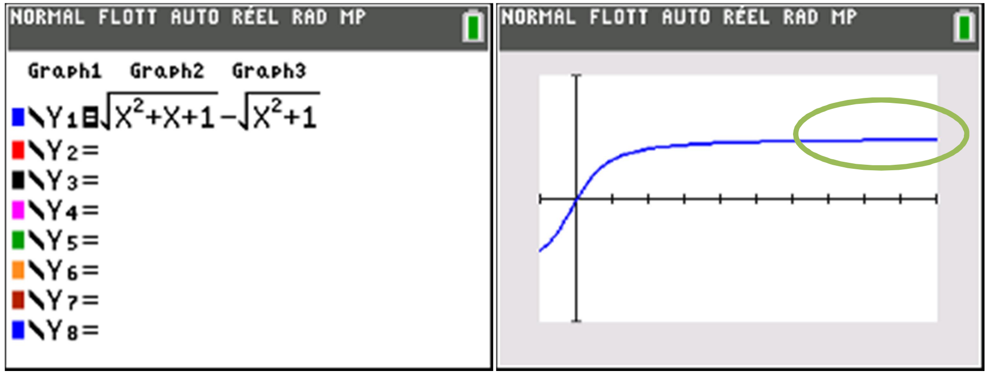
Or, $\lim\limits_{X\to-\infty} X^3e^X = 0$ (croissances comparées), donc :

$$\lim_{X\to-\infty}\left(\frac{1}{8}\,X^3e^X\right) = 0$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} x^3e^{2x} = 0}$$

08. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\boldsymbol{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}}\right)$



Pour tout $x > 0$, on a :

$$\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x^2+x+1-(x^2+1)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \qquad (x > 0 \text{ donc } \sqrt{x^2} = x)$$

$$= \frac{x \times 1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1$$

Puis :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{X\to1}\sqrt{X} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{Y\to1}\sqrt{Y} = 1$$

puis par limite d'une somme et d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}$$

<u>Conclusion</u> :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{1}{2}$$

09. $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{-x+5}{e^{-x}-1}$ **et** $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{-x+5}{e^{-x}-1}$

Cherchons pour quelles valeurs de x on a $e^{-x}-1>0$:

$$e^{-x}-1>0 \Leftrightarrow e^{-x}>1 \Leftrightarrow e^{-x}>e^{0} \Leftrightarrow -x>0 \Leftrightarrow x<0$$

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{-x}-1$		$+$	0	$-$	

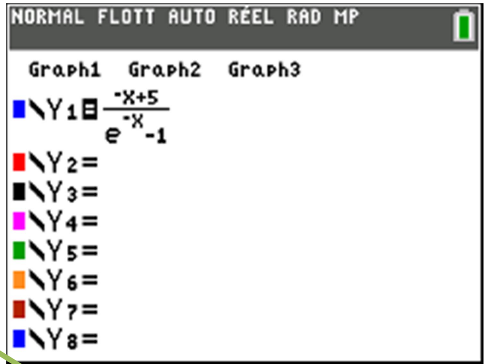
• **lorsque $x\to0^-$**

On a : $\displaystyle\lim_{x\to0^-}(-x+5)=5$

et : $\displaystyle\lim_{x\to0^-}(e^{-x}-1)=0^+$

donc par limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to0^-}\frac{-x+5}{e^{-x}-1}=+\infty$$



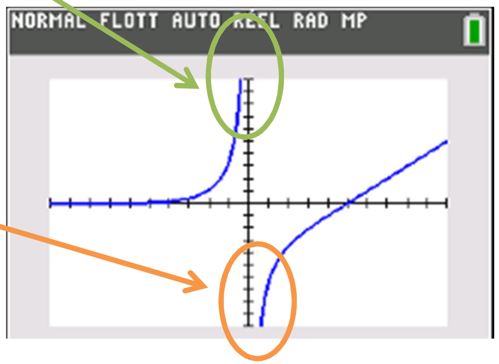
• **lorsque $x\to0^+$**

On a : $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(-x+5)=5$

et : $\displaystyle\lim_{x\to0^+}(e^{-x}-1)=0^-$

donc par limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{-x+5}{e^{-x}-1}=-\infty$$



10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\cos(x)+e^{x})$

Soit $x\in\mathbb{R}$.

On a : $-1\leqslant\cos(x)\leqslant1$

puis en ajoutant e^{x} à chaque membre : $-1+e^{x}\leqslant\cos(x)+e^{x}\leqslant1+e^{x}$

autrement dit : $e^{x}-1\leqslant\cos(x)+e^{x}\leqslant e^{x}+1$

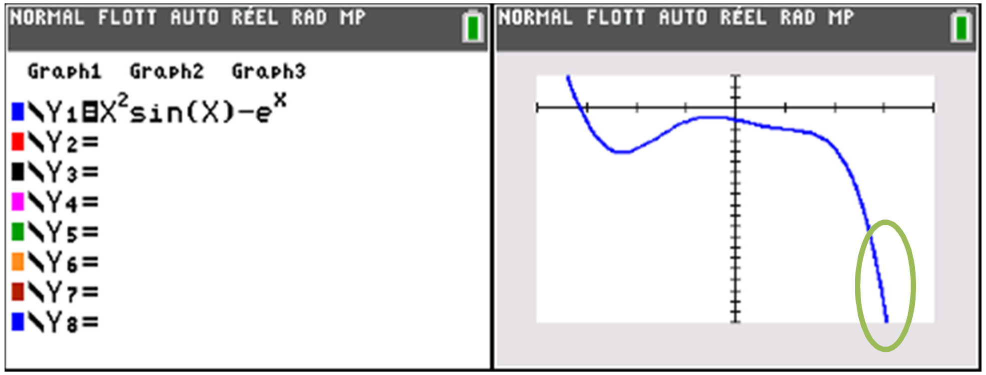
Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ $(cours)$, donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(e^{x}-1)=+\infty$.

On a : $\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}, e^{x}-1\leqslant\cos(x)+e^{x}\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}(e^{x}-1)=+\infty\end{cases}$

donc d'après le théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty}(\cos(x)+e^{x})=+\infty$$

11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^2\sin(x)-e^{x})$



Soit $x\in\mathbb{R}$.

On a : $-1\leqslant\sin(x)\leqslant1$

en multipliant pat x^2 qui est positif ou nul :

$$(-1)\times x^2\leqslant\sin(x)\times x^2\leqslant1\times x^2$$

c'est-à-dire : $-x^2\leqslant x^2\sin(x)\leqslant x^2$

puis en retranchant e^{x} à chaque membre :

$$-x^2-e^{x}\leqslant x^2\sin(x)-e^{x}\leqslant x^2-e^{x}$$

Pour $x \neq 0$, on a :

$$x^2 - e^x = x^2\left(1 - \frac{e^x}{x^2}\right)$$

D'une part : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ $(croissances\ compar\acute{e}es)$ donc, par limite d'une différence : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{e^x}{x^2}\right) = -\infty$

et d'autre part on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $(cours)$

donc par limite d'un produit :

$$\lim_{\mathrm{x} \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{e^x}{x^2}\right) = -\infty$$

autrement dit : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - e^x) = -\infty$.

On a : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \sin(x) - e^x \leqslant x^2 - e^x \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - e^x) = -\infty \end{cases}$

donc d'après le théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} (x^2 \sin(x) - e^x) = -\infty}$$