Préparation bac : calcul d'une intégrale

Ex 01*

On cherche à calculer :

$$\boldsymbol{I = \int_0^{\ln 5} \frac{1}{e^x + 1}\,dx}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{e^x + 1}}$$

1. **Déterminer des constantes réelles a et b telles que :**

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a + b \times \frac{e^x}{1 + e^x}}$$

2. **En déduire une primitive, au choix, de f sur $\mathbb{R}$.**
3. **Déterminer la valeur exacte de I.**

Corrigé

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$a + b \times \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{a(1 + e^x)}{1 + e^x} + \frac{be^x}{1 + e^x} = \frac{a + ae^x + be^x}{1 + e^x} = \frac{(a + b)e^x + a}{1 + e^x}$$

On doit donc avoir pour tout réel x :

$$\frac{1}{1 + e^x} = \frac{(a + b)e^x + a}{1 + e^x}$$

autrement dit :

$$\frac{0e^x + 1}{1 + e^x} = \frac{(a + b)e^x + a}{1 + e^x}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1}}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons : $u(x) = e^x + 1$, d'où : $u'(x) = e^x$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 - \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Or,

l'une des primitives de $x \mapsto 1$ est $x \mapsto x$ et l'une des primitive de $\frac{u'}{u}$ $(u > 0)$ est $\ln u$, donc en notant F l'une des primitives de $x \mapsto 1 - \frac{e^x}{e^x + 1}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = x - \ln\big(u(x)\big)$$

soit finalement :

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = x - \ln(e^x + 1)}$$

3. On a :

$$I = \int_0^{\ln 5} f(x)dx$$

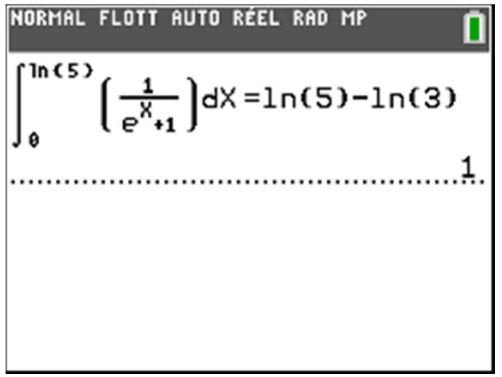
avec f continue sur $[0; \ln 5]$ et F est l'une des primitives de f sur cet intervalle donc :

$$\int_0^{\ln 5} f(x)dx = [F(x)]_0^1$$

Or

$$\begin{aligned}
&[F(x)]_0^1 \\
&= [x - \ln(e^x + 1)]_0^{\ln 5} \\
&= \ln 5 - \ln\big(e^{\ln 5} + 1\big) - (0 - \ln(e^0 + 1)) \\
&= \ln 5 - \ln(5 + 1) - 0 + \ln(1 + 1) \\
&= \ln 5 - \ln 6 + \ln 2 \\
&= \ln 5 - \ln(2 \times 3) + \ln(2) \\
&= \ln 5 - (\ln 2 + \ln 3) + \ln 2 \\
&= \ln 5 - \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 \\
&= \ln 5 - \ln 3
\end{aligned}$$

Finalement : $\boldsymbol{I = \ln 5 - \ln 3}$.



utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Ex 02*

On pose :

$$\boldsymbol{A = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 2}\,dx} \text{ et } \boldsymbol{B = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2}\,dx}$$

1. **Calculer $2A + B$.**
2. **Calculer B.**
3. **Déterminer la valeur de A.**

Corrigé

1. On a :

$$\begin{aligned}
&2A + B \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{e^x+2}dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx \\
&= \int_0^1 2 \times \frac{1}{e^x+2}\,dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{2}{e^x+2}\,dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{2}{e^x+2} + \frac{e^x}{e^x+2}\right)dx \\
&= \int_0^1 \frac{e^x+2}{e^x+2}dx \\
&= \int_0^1 1\,dx \\
&= [x]_0^1 \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boldsymbol{2A + B = 1}$.

2. Calculons B.

$$B = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}$$

En posant $u(x) = e^x + 2$, on a $u'(x) = e^x$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{e^x}{e^x+2} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Or, l'une des primitives de $\frac{u'}{u}\ (u > 0)$ est $\ln u$ donc l'une des primitives de $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+2}$ est x $\mapsto \ln(u(x))$, c'est-à-dire : $x \mapsto \ln(e^x + 2)$.

Comme de plus $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+2}$ est continue sur $[0; 1]$, on en déduit :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2} = [\ln(e^x+2)]_0^1$$

Or,

$$\begin{aligned}
&[\ln(e^x+2)]_0^1 \\
&= \ln(e^1+2) - \ln(e^0+2) \\
&= \ln(e+2) - \ln(1+2) = \ln(e+2) - \ln(3)
\end{aligned}$$

Donc : $\boldsymbol{B = \ln(e+2) - \ln(3)}$.

3. Calculons A.

On a montré que $2A + B = 1$, or $B = \ln(e+2) - \ln(3)$ donc :

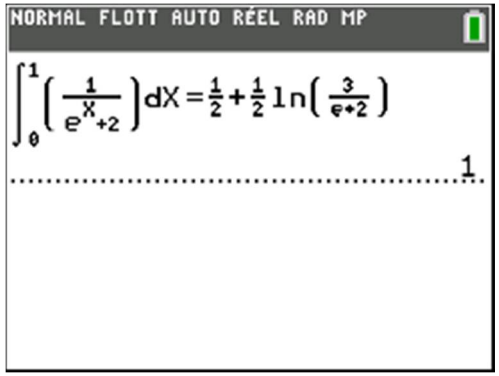
$$2A + \ln(e+2) - \ln(3) = 1 \Leftrightarrow 2A = 1 - \ln(e+2) + \ln(3)$$
$$\Leftrightarrow 2A = 1 + \ln\left(\frac{3}{e+2}\right) \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{e+2}\right)$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{e+2}\right)}$$

Autrement dit :

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+2}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{e+2}\right)$$



utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Ex 03* [d'après bac]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

1. **Calculer :**

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

2. **Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:**

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$$

3. **Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.**
4. **Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 0.**
5. **Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergence et déterminer sa limite.**

Corrigé

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

1. Calcul de $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

L'une des primitives de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est $x \mapsto \ln(x+1)$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0;1]$ donc :

$u_0 = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(1+1) - \ln(0+1) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$

Finalement : $\boldsymbol{u_0 = \ln 2}$.

2. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} + \frac{x^n}{1+x}\right)dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}dx = \int_0^1 x^n \times \frac{x+1}{x+1}dx$$
$$= \int_0^1 x^n \times 1\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} - 0$$
$$= \frac{1}{n+1}$$

On a donc bien : $\forall \in \mathbb{N}$ **:** $\boldsymbol{u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}}$**.**

3. Démontrons que (u_n) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x}\right)dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}dx$$

Or, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$on a $x^n \geqslant 0$, $x - 1 \leqslant 0$ et $1 + x > 0$ donc $\frac{x^n(x-1)}{1+x} \leqslant 0$

puis en intégrant dans l'ordre croissant des bornes :

$$\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}dx \leqslant 0$$

autrement dit : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc $(\boldsymbol{u_n})$ **est décroissante**.

4. **Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 0.**

Pour tout $x \in [0;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $x \geqslant 0$ donc $x^n \geqslant 0$.

On a : $x \geqslant 0$ donc $x + 1 \geqslant 1 > 0$ donc $\frac{x^n}{1+x} \geqslant 0$.

Puis en intégrant dans l'ordre croissant des bornes :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \geqslant \int_0^1 0\,dx$$

autrement dit : $u_n \geqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ et 0 est une constante donc la suite $(\boldsymbol{u_n})$ **est minorée par 0**.

5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) est convergente.

Notons ℓ sa limite. On a vu que ,pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$ donc les deux membres de cette égalité ont même limite.

Or $u_{n+1} \to \ell$ et $u_n \to \ell$ donc $u_{n+1} + u_n \to 2\ell$ et $\frac{1}{n+1} \to 0$ donc $2\ell = 0$ d'où $\ell = 0$.

Conclusion :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Ex 04* **[suite et intégrale, d'après bac]**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$$

On ne cherchera ni à déterminer une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ sur $[0; +\infty[$ ni à déterminer la formule explicite de u_n.

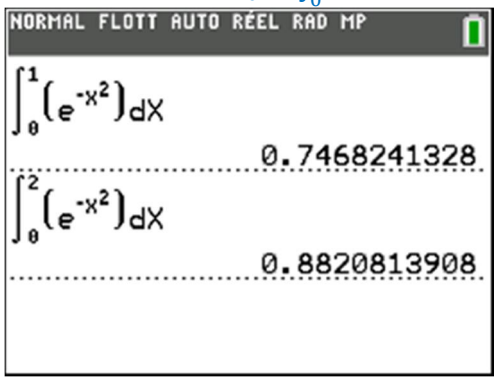
1. **Étudier le sens de variation de la suite (u_n).**
2. **Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $-x^2 \leqslant -2x + 1$, en déduire que la suite (u_n) est majorée par $\frac{e}{2}$.**
3. **La suite (u_n) est-elle convergente ?**

Corrigé

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$

1. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Remarquons que : $u_0 = \int_0^0 e^{-x^2} dx = 0$ puis en utilisant la calculatrice:



On peut donc conjecturer que « (u_n) est croissante ».

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ &= \int_0^{n+1} e^{-x^2} dx - \int_0^n e^{-x^2} dx \\ &= \int_0^{n+1} e^{-x^2} dx + \int_n^0 e^{-x^2} dx \\ &= \int_n^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{n+1} e^{-x^2} dx \\ &= \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx \quad (Chasles) \end{aligned}$$

Or, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $e^X > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} > 0$,
puis en intégrant dans l'ordre croissant des bornes on obtient :

$$\int_n^{n+1} e^{-x^2} dx \geqslant 0$$

autrement dit : $u_n \geqslant 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.

2. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $-x^2 \leqslant -2x + 1$, en déduire que la suite (u_n) est majorée par $\frac{e}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^2 - 2x + 1 = (x)^2 - 2(x)(1) + (1)^2 = (x-1)^2$$

Or le carré d'un réel est toujours positif ou nul donc : $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$
autrement dit : $-2x + 1 \geqslant -x^2$; on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 \leqslant -2x + 1$ $(*)$.
La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc on déduit de $(*)$ que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$, puis en intégrant dans l'ordre croissant des bornes on obtient :

$$\int_0^n e^{-x^2} dx \leqslant \int_0^n e^{-2x+1} dx$$

autrement dit :

$$u_n \leqslant \int_0^n e^{-2x+1} dx$$

$x \mapsto e^{-2x+1}$ est de la forme $x \mapsto e^{ax+b}$ avec $a \neq 0$, dont l'une des primitives est $x \mapsto \frac{1}{a} e^{ax+b}$, donc l'une des primitives de $x \mapsto e^{-2x+1}$ est $-\frac{1}{2} e^{-2x+1}$ et comme de plus cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[0; n]$ on en déduit :

$$\int_0^n e^{-2x+1} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x+1} \right]_0^n$$

Or,

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x+1} \right]_0^n &= -\frac{1}{2} e^{-2n+1} - \left(-\frac{1}{2} e^{-2(0)+1} \right) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2n+1} + \frac{1}{2} e = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} e^{-2n+1} < \frac{e}{2} \end{aligned}$$

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

On a donc :

$$u_n = \int_0^n e^{-2x+1}dx < \frac{e}{2}$$

donc : $u_n < \frac{e}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \frac{e}{2}$ et $\frac{e}{2}$ est une constante donc (u_n) est majorée par $\frac{e}{2}$.

3. La suite (u_n) est-elle convergente ?
La suite (u_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone elle est convergente.

Complément On pourra démontrer dans quelques années que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ex 05* [intégration par partie, d'après bac]
À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$$

Corrigé
On a :

$$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx = \int_0^{\pi} u(x)\,v'(x)dx$$

On pose : $u(x) = x$ $\quad v'(x) = \sin(x)$
$u'(x) = 1$ $\quad v(x) = -\cos(x)$ (convient)

Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0\,;\pi]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\pi} u(x)v'(x)\,dx = [u(x)\times v(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x)\,dx$$

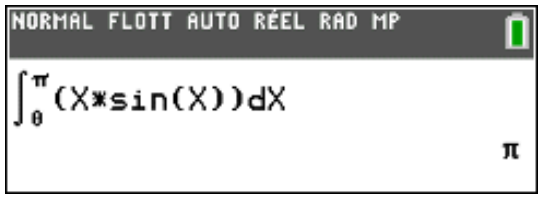
$$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx = [-x\cos(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\,(-\cos(x))dx$$

$$= [-x\cos(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(x)\,dx = [-x\cos(x)]_0^{\pi} + [\sin(x)]_0^{\pi}$$

$$= [-x\cos(x)+\sin(x)]_0^{\pi} = (-\pi\cos(\pi)+\sin(\pi)) - (-0\cos(0)+\sin(0))$$

$$= -\pi\times(-1) + 0 - 0 = \pi$$

Finalement : $\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx = \pi$



Ex 06* [intégration par parties, d'après bac]
À l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$\boldsymbol{I = \int_0^1 2x^3e^{x^2-1}\,dx}$$

Indication : $\forall x \in \mathbb{R}, 2x^3e^{x^2-1} = x^2 \times 2xe^{x^2-1}$.

Corrigé
On a :

$$\int_0^1 x^2\times 2xe^{x^2-1}\,dx = \int_0^1 u(x)\,v'(x)dx$$

On pose : $u(x) = x^2$ $\quad v'(x) = 2xe^{x^2-1}$
$u'(x) = 2x$ $\quad v(x) = e^{x^2-1}$ (convient)

Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0\,;1]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = [u(x)\times v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx$$

$$\int_0^1 x^2\times 2xe^{x^2-1}\,dx = \left[x^2e^{x^2-1}\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^{x^2-1}\,dx$$

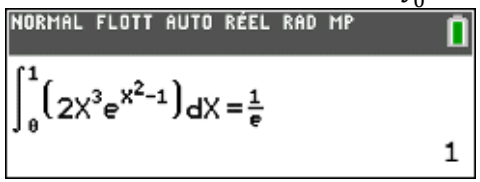
$$= \left[x^2e^{x^2-1}\right]_0^1 - \left[e^{x^2-1}\right]_0^1 = \left[x^2e^{x^2-1} - e^{x^2-1}\right]_0^1$$

$$= 1^2e^{1^2-1} - e^{1^2-1} - \left(0^2e^{0^2-1} - e^{0^2-1}\right)$$

$$= 1e^0 - e^0 - (0 - e^{-1}) = 1\times 1 - 1 + e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Finalement :

$$I = \int_0^1 2x^3e^{x^2-1}\,dx = \frac{1}{e}$$



utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Ex 07** **[double intégration par partie, d'après bac]**
À l'aide de deux intégrations par parties, calculer :

$$\boldsymbol{I = \int_0^{2\pi} e^x \cos(x)\, dx}$$

Corrigé

On a :

$$\int_0^{2\pi} e^x \cos(x)\, dx = \int_0^{2\pi} u(x)\, v'(x) dx$$

On pose : $u(x) = e^x$ $\quad v'(x) = \cos(x)$
$u'(x) = e^x$ $\quad v(x) = \sin(x)$ (convient)

Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0\,;\,2\pi]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{2\pi} u(x)v'(x)\, dx = [u(x) \times v(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} u'(x)v(x)\, dx$$
$$\int_0^{2\pi} e^x \cos(x)\, dx = [e^x \sin(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x \sin(x)\, dx$$
$$I = e^{2\pi}\sin(2\pi) - e^0 \sin(0) - \int_0^{2\pi} e^x \sin(x)\, dx$$
$$I = 0 - 0 - K$$
$$I = -K$$

en posant : $K = \int_0^{2\pi} e^x \sin(x)\, dx$.

Calculons $K = \int_0^{2\pi} e^x \sin(x)\, dx$ à l'aide d'une intégration par parties :

On pose : $u(x) = e^x$ $\quad v'(x) = \sin(x)$
$u'(x) = e^x$ $\quad v(x) = -\cos(x)$ (convient)

Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0; 2\pi]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

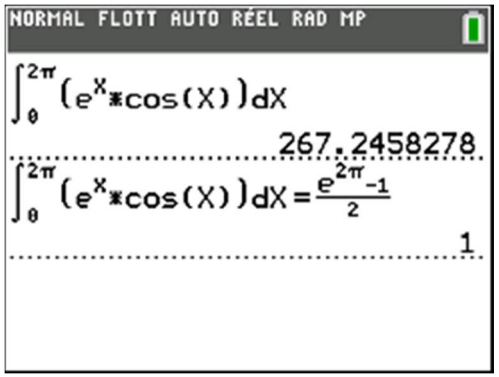
$$\int_0^{2\pi} u(x)v'(x)\, dx = [u(x) \times v(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} u'(x)v(x)\, dx$$
$$K = [e^x \times (-\cos(x))]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^x(-\cos(x))\, dx$$
$$K = [-e^x \cos(x))]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^x \cos(x)\, dx$$
$$K = -e^{2\pi}\cos(2\pi) + e^0 \cos(0) + I$$
$$K = -e^{2\pi} \times 1 + 1 + I$$
$$K = -e^{2\pi} + 1 + I$$

Or $I = -K$ autrement dit $K = -I$, donc :

$$-I = -e^{2\pi} + 1 + I$$
$$2I = e^{2\pi} - 1$$
$$I = \frac{e^{2\pi} - 1}{2}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{I = \int_0^{2\pi} e^x \cos(x)\, dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{2}}$$



Remarque

On pourrait aussi effectuer une double intégration par parties en posant à chaque fois $v'(x) = e^x$.

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Ex 08* [suite et intégrale, exercice 2 « « sujet 0 janvier 2024 »]

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie I

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, f_n est la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^x$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan. On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$$

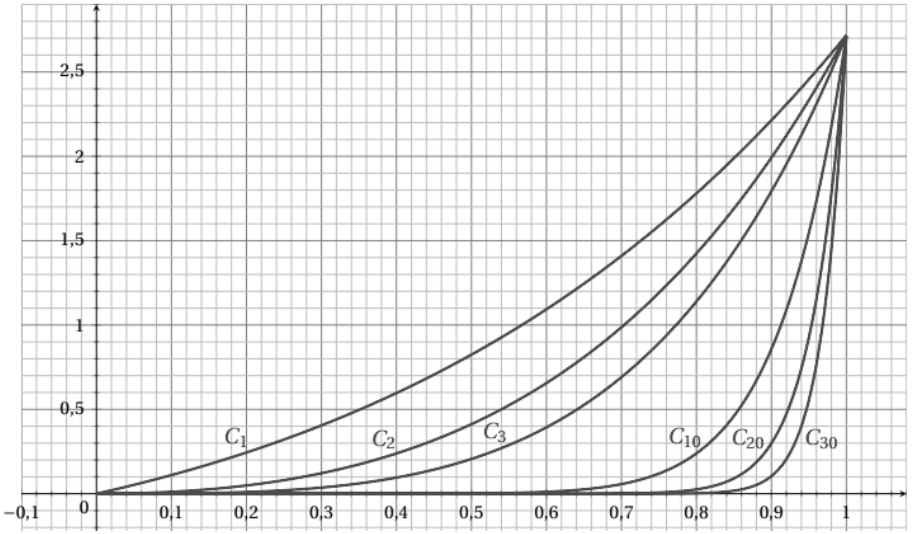
1. **a.** On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0;1]$ par : $F_1(x) = (x-1)e^x$. Vérifier que F_1 est une primitive de f_1.
   b. calculer I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout n supérieur ou égal à 1 :
   $$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$
3. Calculer I_2.
4. On considère la fonction mystere écrite dans le langage Python :

```
from math import e # la constante d'Euler e
def mystere(n):
    a = 1
    L = [a]
    for i in range(1,n):
        a = e - (i + 1)*a
        L.append(a)
    return L
```

À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel mystere(5).

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_{10}$, $\mathcal{C}_{20}$ et $\mathcal{C}_{30}$:



   a. Donner une interprétation graphique de I_n.
   b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :
   $$0 \leqslant I_n \leqslant e \int_0^1 x^n \, dx$$
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Corrigé

Partie I

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1]$, $f_n(x) = x^n e^x$, C_n courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan et :

$$\boldsymbol{I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx}$$

1. a. $\forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0};\mathbf{1}], \boldsymbol{F_1(x) = (x-1)e^x}$

Vérifier que F_1 est une primitive de f_1.

$F_1(x) = (x-1)e^x$

$rappel : (uv)' = u'v + uv'$

$F_1'(x) = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x$

$F_1'(x) = (1 + x - 1)e^x$

$F_1'(x) = xe^x$

Or, $f_1(x) = x^1 e^x = e^x$

On a donc : $\forall x \in [0;1]$, $F_1{}'(x)(x) = f_1(x)$.

On a $F_1 = f_1$ sur $[0;1]$ autrement dit **$\boldsymbol{F_1}$ est une primitive de $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{[0;1]}$.**

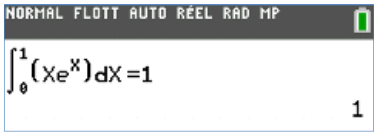
b. Calcul de $\boldsymbol{I_1}$

$I_1 = \int_0^1 xe^x \, dx = \int_0^1 f_1(x) \, dx$

La fonction f_1 est continue sur $[0;1]$ et F_1 est une primitive de f_1 sur cet intervalle donc :

$$\int_0^1 f_1(x) \, dx = [F_1(x)]_0^1 = [(x-1)e^x]_0^1 = (1-1)e^1 - (0-1)e^0$$
$$= 0 + 1 = 1$$

Conclusion : $\boldsymbol{I_1 = 1}$.



2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout $\boldsymbol{n}$ supérieur ou égal à 1 : $\boldsymbol{I_{n+1} = e - (n+1)I_n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx$$

On pose : $u(x) = x^{n+1}$ $\quad v'(x) = e^x$

$u'(x) = (n+1)x^n$ $\quad v(x) = e^x$ (convient)

Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$ donc on peut utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) \, dx$$
$$\int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx = [x^{n+1}e^x]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x \, dx$$
$$\int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx = [x^{n+1}e^x]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x \, dx$$

Autrement dit :

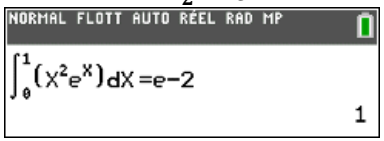
$I_{n+1} = 1^{n+1}e^1 - 0^{n+1}e^0 - (n+1)I_n = e - 0 - (n+1)I_n = e - (n+1)I_n$

On a donc bien : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \boldsymbol{I_{n+1} = e - (n+1)I_n}$.

3. Calcul de $\boldsymbol{I_2}$

Pour $n = 1$, la relation de récurrence précédente donne :

$$I_2 = e - (1+1)I_1 = e - 2I_1 = e - 2(1) = e - 2$$
$$\boldsymbol{I_2 = e - 2}$$



4.

```
from math import e # la constante d'Euler e
def mystere(n):
    a = 1
    L = [a]
    for i in range(1,n):
        a = e - (i + 1)*a
        L.append(a)
    return L
```

Expliquer ce que renvoie l'appel mystere(5).

mystère(5) renvoie la liste des nombres I_1, I_2, I_3, I_4, I_5.

Partie II

1. a. Donner une interprétation graphique de $\boldsymbol{I_n}$.

f_n étant continue et positive sur $[0;1]$, I_n représente l'aire du domaine située entre $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisse et les droites verticales d'équations respectives $x = 0$ (c'est l'axe des ordonnées) et $x = 1$ exprimée en $u.a$.

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?
On peut raisonnablement penser que l'aire du domaine décrit en **a.** tend vers zéro, autrement dit on peut conjecturer que : « $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ ».

2. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant I_n \leqslant e\int_0^1 x^n\,dx$

Pour tout $x \in [0;1]$, on a : $x \leqslant 1$, or la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est croissante sur $[0;1]$ donc : $e^x \leqslant e^1$, et comme $e^x > 0$ on en déduit : $0 \leqslant e^x \leqslant e$, en multipliant chaque membre par $x^n \geqslant 0$ on obtient :

$$x^n \times 0 \leqslant x^n \times e^x \leqslant x^n \times e \Leftrightarrow 0 \leqslant f_n(x) \leqslant e \times x^n$$

puis en intégrant dans l'ordre croissant des bornes :

$$\int_0^1 0\,dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx \leqslant \int_0^1 e \times x^n\,dx \Leftrightarrow [k]_0^1 \leqslant I_n \leqslant e \times \int_0^1 x^n\,dx$$

$$\Leftrightarrow k - k \leqslant I_n \leqslant e \times \int_0^1 x^n\,dx \Leftrightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant e \times \int_0^1 x^n\,dx$$

On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant I_n \leqslant e\int_0^1 x^n\,dx$.

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}1^{n+1} - \frac{1}{n+1}0^{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

donc l'inégalité obtenue à la question **2.** s'écrit : $0 \leqslant I_n \leqslant e \times \frac{1}{n+1}$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = \lim\limits_{N\to+\infty}\frac{1}{N} = 0$

puis par limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty}(e \times \frac{1}{n+1}) = 0$

Résumons :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant I_n \leqslant e \times \dfrac{1}{n+1} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty}(e \times \dfrac{1}{n+1}) = 0 \end{cases}$$

donc par application du théorème des gendarmes on en déduit que (I_n) est convergente et que sa limite est 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

Ex 09 [d'après Bac, extrait, suite et intégrale]

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_1^e x\,(\ln x)^n dx$$

1. Calculer $I_0 = \int_1^e x\,dx$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$
3. En déduire I_1 et I_2.

Corrigé

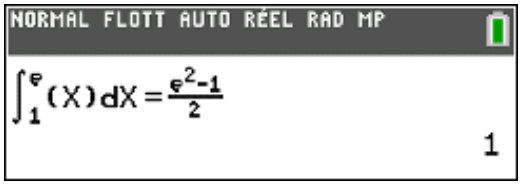
1. Calculer $I_0 = \int_1^e x\,dx$.

$x \mapsto x$est continue sur $[1;e]$ et l'une de ses primitives est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ donc :

$$\int_1^e x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{e^2-1}{2}$$

Conclusion :

$$I_0 = \frac{e^2-1}{2}$$



2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \int_1^e x\,(\ln x)^n dx$.

Effectuons une intégration par parties de $I_{n+1} = \int_1^e x\,(\ln x)^{n+1} dx$

Pour tout $x \in [1;e]$, on pose :

$u(x) = (\ln x)^{n+1}$ $\quad$ $v'(x) = x$

$u'(x) = (n+1)(\ln x)^n \times \frac{1}{x}$ $\quad$ $v(x) = \frac{x^2}{2}$ (convient)

u' et v' sont continues sur $[1;e]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_1^e u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x)\,dx$$

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

On obtient

$$\int_1^e x\,(\ln x)^{n+1}dx = \left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e (n+1)(\ln x)^n \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} \times x^2 dx$$

$$\int_1^e x\,(\ln x)^{n+1}dx = \left[\frac{1}{2}x^2(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e (n+1)(\ln x)^n \times x \times \frac{1}{2} dx$$

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2}(\ln e)^{n+1} - \frac{1}{2}1^2(\ln 1)^{n+1} - \frac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln x)^n dx$$

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} \times 1^{n+1} - \frac{1}{2} \times 0^{n+1} - \frac{n+1}{2} I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

On a donc bien :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{I_{n+1}} = \frac{\boldsymbol{e^2}}{\boldsymbol{2}} - \frac{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{2}} \boldsymbol{I_n}$$

3. En déduire I_1 et I_2.

Pour $n = 0$ on obtient :

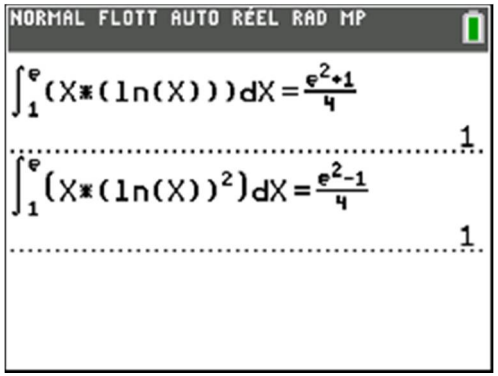
$$I_1 = \frac{e^2}{2} - \frac{0+1}{2} I_0 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{e^2-1}{2} = \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{2e^2-(e^2-1)}{4}$$

$$\boldsymbol{I_1 = \frac{e^2+1}{4}}$$

Pour $n = 1$ on obtient :

$$I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{1+1}{2} I_1 = \frac{e^2}{2} - I_1 = \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2+1}{4} = \frac{2e^2-(e^2+1)}{4} = \frac{e^2-1}{4}$$

$$\boldsymbol{I_2 = \frac{e^2-1}{4}}$$

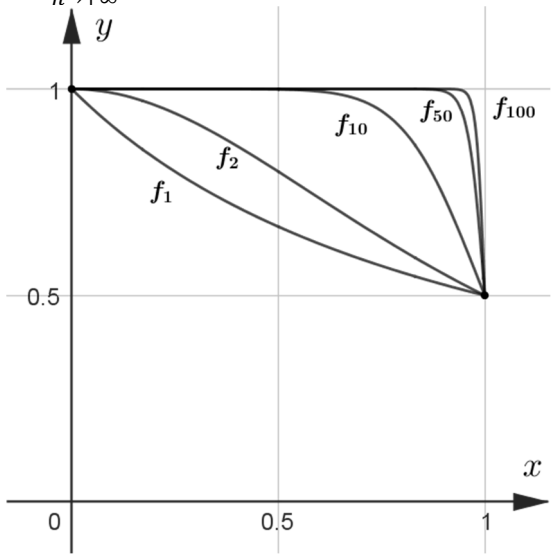


<u>Ex 10*</u> [suite et intégrale, d'après bac ASIE Juin 2014, extrait]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par : $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n sont tracées : conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.



2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. a. Démontrer que, $\forall x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a : $I_n \leqslant 1$.

4. Démontrer que $\forall x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 - x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$

5. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 (1-x^n)\,dx$$

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Corrigé

$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0};\mathbf{1}], \boldsymbol{f_n(x)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x^n}}$

$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \boldsymbol{I_n} = \displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{f_n(x)}\,\boldsymbol{dx} = \int_0^1 \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x^n}}\boldsymbol{dx}$

1. Conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

La fonction f_n est continue et positives sur $[0;1]$ donc $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ représente l'aire en $u.a.$ du domaine plan délimité par la courbe représentative de f_n, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations respectives $x=0$ et $x=1$, or il semble que, lorsque $n \to +\infty$,ce domaine se « rapproche de plus en plus » d'un carré de côté 1 donc on peut conjecturer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1.

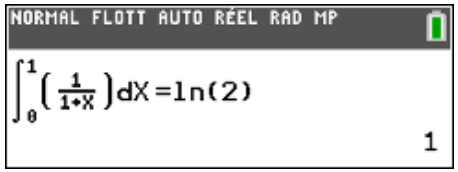
Pour $n=1$ on obtient :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^1}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0;1]$ et l'une de ses primitives sur cet intervalle est $x \mapsto \ln(1+x)$ donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(1+1) - \ln(1+0) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Finalement : $\boldsymbol{I_1 = \ln(2)}$.



3. a. Démontrer que, $\forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0};\mathbf{1}]$ et $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ on a : $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x^n}} \leqslant \mathbf{1}$.

Soit $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$1 - \frac{1}{1+x^n} = \frac{1+x^n}{1+x^n} - \frac{1}{1+x^n} = \frac{1+x^n-1}{1+x^n} = \frac{x^n}{1+x^n}$$

$x^n \geqslant 0$, $1+x^n > 0$ donc $\frac{x^n}{1+x^n} \geqslant 0$, par conséquent : $1 - \frac{1}{1+x^n} \geqslant 0$,

autrement dit : $\frac{1}{1+x^n} \geqslant 1$.

On a donc bien : $\forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0};\mathbf{1}]$ et $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ on a : $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x^n}} \leqslant \mathbf{1}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a : $I_n \leqslant 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0;1]$ on :

$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$$

En intégrant dans l'ordre croissant des bornes, on en déduit :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx \leqslant \int_0^1 1\,dx$$

$I_n \leqslant [x]_0^1$, or : $[x]_0^1 = 1-0 = 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leqslant 1$.

4. Démontrer que $\forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0};\mathbf{1}]$ et $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbf{1} - \boldsymbol{x^n} \leqslant \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x^n}}$.

Soit $x \in [0;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} - (1-x^n) = \frac{1}{1+x^n} - \frac{(1-x^n)(1+x^n)}{1+x^n}$$
$$= \frac{1-(1+x^n-x^n-x^{2n})}{1+x^n} = \frac{x^{2n}}{1+x^n}$$

Or, $x^{2n} \geqslant 0^{\text{e}}$ $1+x^n > 0$ donc $\frac{x^{2n}}{1+x^n} \geqslant 0$, par conséquent :

$$\frac{1}{1+x^n} - (1-x^n) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^n} \geqslant 1-x^n \Leftrightarrow 1-x^n \leqslant \frac{1}{1+x^n}$$

On a donc bien, $\forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0};\mathbf{1}]$ et $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{1} - \boldsymbol{x^n} \leqslant \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x^n}}$.

5. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 (\mathbf{1}-\boldsymbol{x^n})\,\boldsymbol{dx}$.

La fonction $x \mapsto 1-x^n$ est continue sur $[0;1]$ et l'une de ses primitives sur cet intervalle est $x \mapsto x - \frac{x^{n+1}}{n+1}$ donc :

$$\int_0^1 (1-x^n)\,dx = \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{1^{n+1}}{n+1} - \left(0 - \frac{0^{n+1}}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\,dx = 1 - \frac{1}{n+1}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on an montré en 4. que $\forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0};\mathbf{1}], \mathbf{1} - \boldsymbol{x^n} \leqslant \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x^n}}$

donc en intégrant dans l'ordre croissant des bornes :

$$\int_0^1 (1-x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$$

c'est-à-dire :

$$1 - \frac{1}{n+1} \leqslant I_n$$

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Or, on a montré **3. b.** que : $I_n \leqslant 1$ donc :

$$1 - \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 - \frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = \lim\limits_{N\to+\infty}\frac{1}{N} = 0$ puis par limite d'une différence : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$.

On a donc :

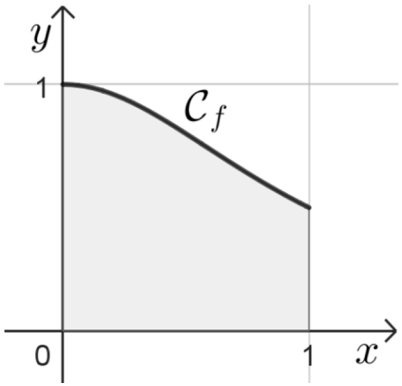
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(1 - \dfrac{1}{n+1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \end{cases}$$

donc d'après le théorème des gendarmes on en déduit que la suite (I_n) est convergente et que sa limite est 1 : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 1}$.

<u>Ex 11</u> [estimation d'une aire, Python]

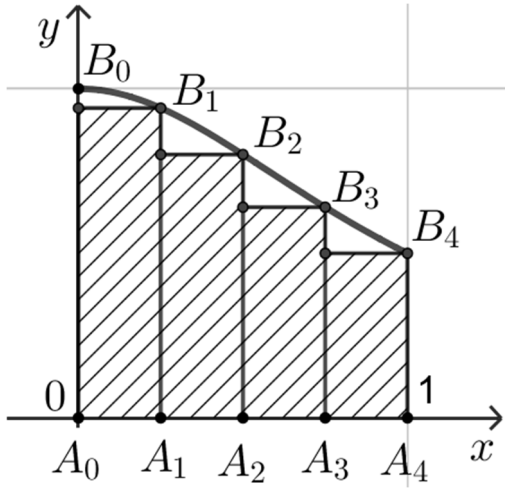
$\forall x \in x \in [0;1], f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan et on se propose d'estimer l'intégrale : $I = \int_0^1 f(x)\,dx$, c'est-à-dire d'estimer l'aire du domaine du plan délimité $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$:



On ne cherchera pas à obtenir une primitive de f sur $[0;1]$.

1. Vérifier que $B_0(0;1)$ et $B_4\left(1;\frac{1}{2}\right)$ appartiennent à $\mathcal{C}_f$ puis démontrer que sur l'intervalle $[0;1]$ la droite (B_0B_4) est située sous $\mathcal{C}_f$ (au sens large), en déduire que $0{,}75 \leqslant I$.
2. On s'intéresse à la somme $S(4)$ des aires des rectangles représentées ci-après avec : $\forall n \in \{0;1;2;3;4\}, A_n\left(\frac{n}{4};0\right)$ et $B_n\left(\frac{n}{4};f\left(\frac{n}{4}\right)\right)$



Compléter sans justification le programme Python sachant qu'il calcule $S(4)$:

```
01 def f(x:float):
02    return 1/(x**2+1)
03 S=0
04 for n in range(4):
05    S=S+
06 print("S(4)=",S)
```

3. Adapter ce programme pour obtenir une valeur approchée de I en utilisant $1\,000$ rectangles et non plus 4 comme dans la question précédente, et en notant $S(1000)$ la somme alors obtenue.

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication <u>obligatoire</u> de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Corrigé

$\forall x \in x \in [0;1], f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

$I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

1. • **Vérifions que $B_0(0;1)$ et $B_4\left(1;\frac{1}{2}\right)$ appartiennent à $\mathcal{C}_f$**

$f(x_{B_0}) = f(0) = \frac{1}{0^2+1} = \frac{1}{1} = y_{B_0}$ donc $B_0 \in \mathcal{C}_f$

$f(x_{B_4}) = f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} = y_{B_4}$ donc $B_4 \in \mathcal{C}_f$

• **Équation réduite de (B_0B_4)**

L'équation réduite de (B_0B_4) s'écrit $y = ax + b$ avec :

$$a = \frac{y_{B_4} - y_{B_0}}{x_{B_4} - x_{B_0}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{1 - 0} = -\frac{1}{2}$$

$$b = y_{B_0} = 1$$

(B_0B_4) admet pour équation réduite : $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

•**Démontrons que sur l'intervalle $[0;1]$ la droite (B_0B_1) est située sous $\mathcal{C}_f$ (au sens large)**

Pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x-2}{2}$$

$$= \frac{1 \times 2}{2(x^2+1)} + \frac{(x-2)(x^2+1)}{2(x^2+1)} = \frac{2 + (x-2)(x^2+1)}{2(x^2+1)}$$

$$= \frac{2 + x^3 + x - 2x^2 - 2}{2(x^2+1)} = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{2(x^2+1)} = \frac{x(x^2 - 2x + 1)}{2(x^2+1)}$$

$$= \frac{x(x-1)^2}{2(x^2+1)}$$

Pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{x(x-1)^2}{2(x^2+1)}$$

Or, pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$x \geqslant 0, (x-1)^2, 2 > 0 \text{ et } x^2 + 1 > 0 \text{ donc } \frac{x(x-1)^2}{2(x^2+1)} \geqslant 0$$

donc : $-\frac{1}{2}x + 1 \leqslant f(x)$. Par conséquent sur $[0;1]$, (B_0B_4) est située en dessous (au sens large) de $\mathcal{C}_f$.

En déduire que $0,75 \leqslant I$

Pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$-\frac{1}{2}x + 1 \leqslant f(x)$$

donc en intégrant dans l'ordre croissant des bornes :

$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx$$

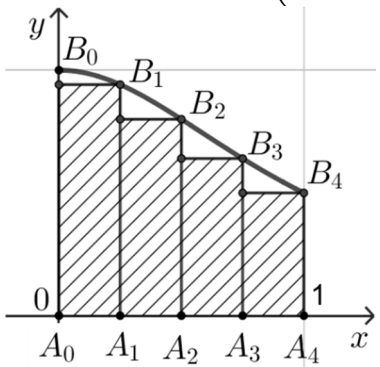
Or :

$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = -\frac{1^2}{4} + 1 - \left(-\frac{0^2}{4} + 0\right) = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

On a donc bien : $0,75 \leqslant I$.

2. $\forall n \in \{0;1;2;3;4\}$:

$A_n\left(\frac{n}{4};0\right)$ et $B_n\left(\frac{n}{4};f\left(\frac{n}{4}\right)\right)$



Compléter le programme Python sachant qu'il calcule $S(4)$:

```
01 def f(x:float):
02    return 1/(x**2+1)
03 S=0
04 for n in range(4):
05    S=S+1/4*f((n+1)/4)
06 print("S(4)=",S)
```

Adapter ce programme pour obtenir une valeur approchée de I en utilisant $1\,000$ rectangles et non plus 4 comme dans la question précédente, et en

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

notant $S(1\ 000)$ la somme alors obtenue.

```
01 def f(x:float):
02    return 1/(x**2+1)
03 S=0
04 for n in range(1000):
05    S=S+1/1000*f((n+1)/1000)
06 print("S(1000)=",S)
```

On obtient, en faisant tourner le programme :
S(1000)= 0.7851481217307804
C'est une bonne valeur approchée de I. En adaptant ce programme à $1\ 000\ 000$ de rectangles on obtient : S(1 000 000)= 0.7853979133973917
C'est une très bonne approximation de I.
On pourra démontrer après le bac que :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »