Sujet $n°$ 01 **[d'après bac Asie Juin 2011, extrait, environ 45 minutes]**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. **Étude d'une fonction f**

   On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

   a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   b. Calculer la dérivée f' de f.

   c. En déduire les variations de f.

2. **Étude d'une fonction g**

   On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$$

   a. Justifier que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\frac{(\ln(x))^2}{x} = 4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$$

   b. Déterminer la limite de g en 0 puis en $+\infty$.

   c. Calculer la dérivée g' de la fonction g.

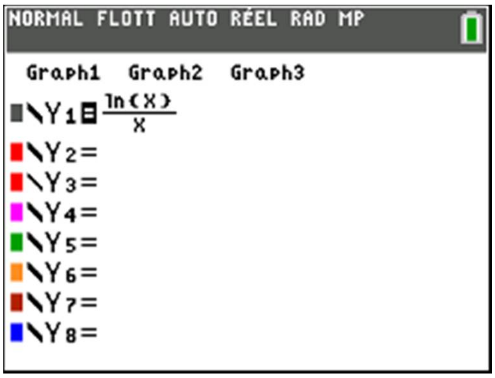
   d. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

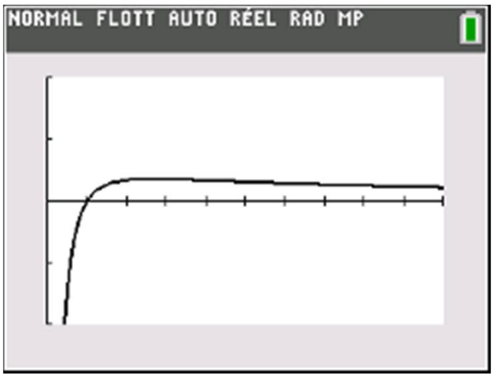
3. **Position relative de deux courbes**

   On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Corrigé





1. **Étude de f**

   $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

   a. Limites de f en 0 et en $+\infty$.

   - on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ $(cours)$ donc par limite d'un quotient on en déduit :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$

• on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $(cours)$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b. Calcul de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

Rappels : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Pour tout $x \in \,]0; +\infty[, \boldsymbol{f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}}$

c. Variations de f

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $1 - \ln(x)$. Cherchons pour quelles valeurs de x on a $1 - \ln(x) > 0$.
Pour $x \in \,]0; +\infty[$, on a les équivalences :
$1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x) > -1 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow \ln(x) < \ln(e^1) \Leftrightarrow \ln(x) < \ln(e)$
Or, pour $a > 0$ et $b > 0$ on a l'équivalence : $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.
Donc : $\ln(x) < \ln(e) \Leftrightarrow x < e$

Résumons :
• $f'(x) \geqslant 0$ sur $]0, e]$ et ne s'annule qu'en e donc f est strictement croissante sur cet intervalle
• $f'(x) \leqslant 0$ sur $[e; +\infty[$ et ne s'annule qu'en e donc f est strictement décroissante sur cet intervalle

2. Étude de g

$$\forall x \in \,]0; +\infty[, \; g(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$$

a. Justifier que, pour tout $x \in \,]0; +\infty[$, on a : $\frac{(\ln(x))^2}{x} = 4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$

Soit $x > 0$, on a :

$$4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4\left(\frac{\frac{1}{2}\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4 \times \frac{\frac{1}{4} \times (\ln(x))^2}{(\sqrt{x})^2} = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{(\ln(x))^2}{x} = \frac{(\ln(x))^2}{x}$$

On a donc bien :

$$\boldsymbol{\forall x \in \,]0; +\infty[, \frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$$

b. Limite de g en 0 et en $+\infty$

$\forall x \in]0;+\infty[, g(x) = \dfrac{(\ln(x))^2}{x}$

• limite lorsque $x \to 0^+$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ $(cours)$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (\ln(x))^2 = +\infty$

puis par limite d'un quotient :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{(\ln(x))^2}{x} = +\infty$$

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty.}$

• limite lorsque $x \to +\infty$

Utilisons l'égalité obtenue à la question **a.**

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0\ (cours)$$

puis par limite d'un produit :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$$

et enfin :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2\right] = 0$$

D'après l'égalité obtenue à la question **a.**, on en déduit immédiatement que :

$\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0.}$

c. Calcul de $g'(x)$

$\forall x \in]0;+\infty[, g(x) = \dfrac{(\ln(x))^2}{x}$

Calculons d'abord la dérivée de la fonction $x \mapsto (\ln(x))^2$.

Rappel : $(u^2)' = 2u \times u'$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

La dérivée de $x \mapsto (\ln(x))^2$ est donc $x \mapsto 2\ln(x) \times \dfrac{1}{x}$

À présent calculons $g'(x)$:

Rappel : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

$$g'(x) = \frac{2\ln(x) \times \frac{1}{x} \times x - 1 \times (\ln(x))^2}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{2\ln(x) - (\ln(x))^2}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{\ln(x) \times (2 - \ln(x))}{x^2}$$

$\boldsymbol{\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = \dfrac{\ln(x) \times (2 - \ln(x))}{x^2}}$

d. Tableau de variation de g

Pour $x > 0$ on a les équivalences :

$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$, $2 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x) > -2 \Leftrightarrow \ln(x) < 2$
$\Leftrightarrow \ln(x) < \ln(e^2) \Leftrightarrow x < e^2$

(pour $a > 0$ et $b > 0$ on a l'équivalence : $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$)

Le signe de $g'(x)$ donne le sens de variation de g. On obtient finalement :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
Sens de variation de g	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

$$g(1) = \frac{(\ln(1))^2}{1} = \frac{0^2}{1} = 0 \quad \text{et} \quad g(e^2) = \frac{(\ln(e^2))^2}{e^2} = \frac{2^2}{e^2} = \frac{4}{e^2}$$

3. Position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

Pour tout $x > 0$, posons $h(x) = f(x) - g(x)$.

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ revient à étudier le signe de $h(x)$.

Pour tout $x > 0$, on a :

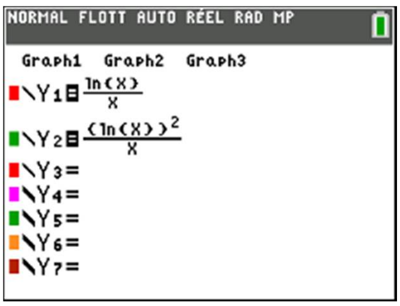
$$h(x) = \frac{\ln(x)}{x} - \frac{(\ln(x))^2}{x} = \frac{\ln(x) - (\ln(x))^2}{x} = \frac{\ln(x) \times (1 - \ln(x))}{x}$$

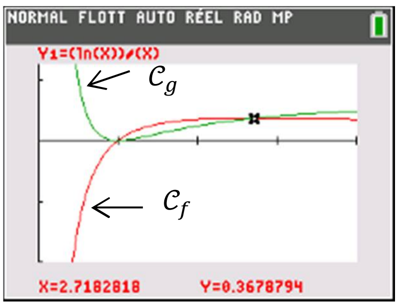
Tableau de signes de $h(x)$:

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

4. On en déduit que :

- sur $]0;1[$ et sur $]e;+\infty[$, $h(x) < 0$ donc **$\mathcal{C}_f$ est située en dessous de $\mathcal{C}_g$**
- sur $]1;e[$, $h(x) > 0$ donc **$\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_g$**
- $f(1) = \frac{\ln(1)}{1} = 0 = g(1)$ et $f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e} = g(e)$ donc **$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points de coordonnées respectives : $(1;0)$ et $\left(e\,;\,\frac{1}{e}\right)$**.





Sujet $n°$ 02 **[d'après Liban Mai 2012, extrait, 40 minutes]**

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln(x)$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x - \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

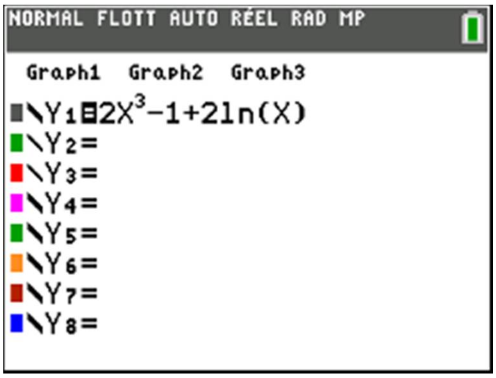
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

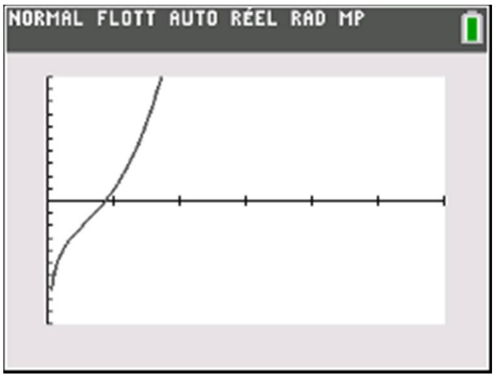
1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Corrigé

Partie A

$\forall x \in]0;+\infty[, g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln(x)$





1. **Variations de g sur $]0;+\infty[$**

   $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln(x)$

   Rappel : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

   $g'(x) = 2 \times 3x^2 - 0 + 2 \times \dfrac{1}{x}$

   $g'(x) = 6x^2 + \dfrac{2}{x}$

   Le signe de $g'(x)$ donne le sens de variation de g.

   Pour $x > 0$, on a : $6x^2 > 0$ et $\dfrac{2}{x} > 0$, donc : $6x^2 + \dfrac{2}{x} > 0$, autrement dit : $g'(x) > 0$.

   Conclusion : **g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.**

2. Existence et unicité d'un réel α tel que $g(\alpha) = 0$, encadrement d'amplitude 10^{-3}.

Déterminons les limites de g en 0 et en $+\infty$. $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln(x)$

• $x \to 0^+$

On a d'une part : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ $(cours)$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\ln(x) = -\infty$.

et d'autre part : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2x^3 - 1) = -1$.

Par limite d'une somme, on en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2x^3 - 1 + 2\ln(x)) = -\infty$.

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty}$.

• $x \to +\infty$

On a d'une part : $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ $(cours)$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln(x) = +\infty$.

et d'autre part : $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$ $(cours)$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x^3 - 1) = +\infty$.

Par limite d'une somme, on en déduit : $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x^3 - 1 + 2\ln(x)) = +\infty$.

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$.

Remarquons que :

• g est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc continue sur cet intervalle

• g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc strictement monotone sur $]0; +\infty[$

• 0 est compris entre $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

Résumons :

• g est continue sur $]0; +\infty[$

• g est <u>strictement</u> monotone sur $]0; +\infty[$

• 0 est compris entre $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires on en déduit qu'il existe un unique $\alpha \in]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$g(0{,}864) \approx -0{,}002 < 0$ et $g(0{,}865) \approx 0{,}0044 > 0$ donc : $\boldsymbol{0{,}864 < \alpha < 0{,}865}$.

3. Signe de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$

• si $x \in]0; \alpha[$, alors $0 < x < \alpha$, or g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc elle conserve le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle, par conséquent : $g(x) < g(\alpha)$, et comme $g(\alpha) = 0$ on en déduit que : $g(x) < 0$

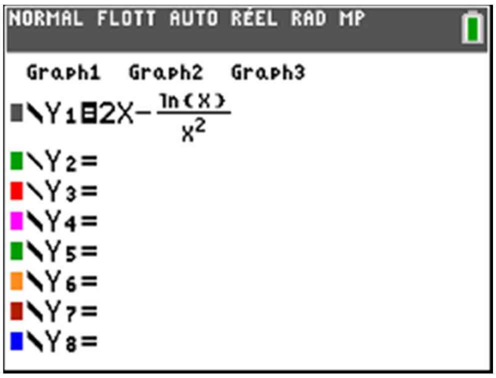
• si $x = \alpha$, alors $g(x) = 0$

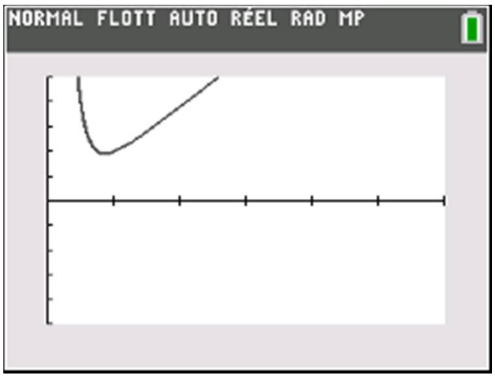
• si $x \in]\alpha; +\infty[$, alors $\alpha < x$, or g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc elle conserve le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle, par conséquent : $g(\alpha) < g(x)$, et comme $g(\alpha) = 0$ on en déduit que : $0 < g(x)$, autrement dit $g(x) > 0$

Résumons : **si $\in]0; \alpha[$, $g(x) < 0$, $g(\alpha) = 0$, si $x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$**

Partie B

$\forall x \in \,]0;+\infty[,\ f(x) = 2x - \dfrac{\ln(x)}{x^2}$





On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Limites de f en 0 et en $+\infty$

• $x \to 0^+$

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ $(cours)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0^+$ donc par limite d'un quotient :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$

Par ailleurs : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x = 0$ donc par limite d'une différence : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[2x - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right] = +\infty$

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty}$.

• $x \to +\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ $(cours)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ donc par limite d'une différence :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[2x - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right] = +\infty$.

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.

$\forall x \in \,]0;+\infty[,\ f(x) = 2x - \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

$f(x) = 2x - \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

Rappel : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 2 - \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln(x)}{(x^2)^2}$

$f'(x) = 2 - \dfrac{x - 2x\ln(x)}{x^4}$

$f'(x) = 2 - \dfrac{x(1 - 2\ln(x))}{x \times x^3}$

$f'(x) = 2 - \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{2x^3}{x^3} - \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$
$$f'(x) = \frac{2x^3 - (1 - 2\ln(x))}{x^3}$$
$$f'(x) = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln(x)}{x^3}$$
Or, $2x^3 - 1 + 2\ln(x) = g(x)$ donc :
$$\forall x \in \,]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$
Or, pour tout $x \in \,]0; +\infty[$, $x^3 > 0$ donc **$f'(x)$ est du signe de son numérateur $g(x)$**.

3. **Tableau de variations de la fonction f**
Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f, or $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe et le signe de $g(x)$ a été obtenu à la question **1.** d'où le tableau de variation :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
sens de variation de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Sujet $n°$ 03 **[d'après Amérique du Nord Juin 2015, 1h10]**

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. Justifier que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
5. Justifier que $2 < \alpha < 3$ puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie C

On munit le plan d'un repère orthogonal, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ on pose : $h(x) = f(x) - \ln(x)$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$h(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}$$

2. Étudier le signe de $h(x)$ sur $]0;+\infty[$, en déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
3. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $]0;+\infty[$, en déduire une primitive de h sur $]0;+\infty[$.
4. Calculer :

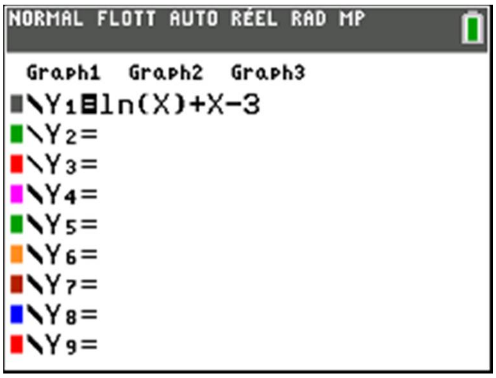
$$I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln(x)}{x}\, dx$$

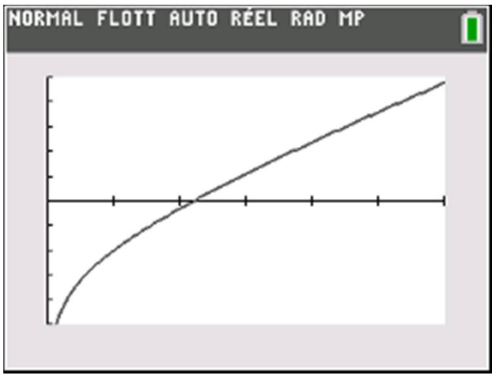
   Interpréter graphiquement ce résultat.

Corrigé

Partie A

$\forall x \in \left]0;+\infty\right[, g(x) = \ln(x) + x - 3$





1. **Justifier que $\boldsymbol{g}$ est strictement croissante sur $\left]\mathbf{0};+\infty\right[$**

   $\forall x \in \left]0;+\infty\right[, g(x) = \ln(x) + x - 3$

   Rappel : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

   $g'(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

   Le signe de $g'(x)$ donne le sens de variation de g, or pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$: $\dfrac{1}{x} > 0$, et $1 > 0$, donc : $\dfrac{1}{x} + 1 > 0$, par conséquent $g'(x) > 0$.

   Pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[, g'(x) > 0$ donc **$\boldsymbol{g}$ est strictement croissante sur $\left]\mathbf{0};+\infty\right[$.**

2. **Limites de $\boldsymbol{g}$ en $\mathbf{0}$ et en $+\infty$**

   • $x \to 0^+$

   On a d'une part : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ $(cours)$ et d'autre part : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x-3) = -3$

   donc par limite d'une somme : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln(x) + x - 3) = -\infty$.

   Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty}$.

   • $x \to +\infty$

   On a d'une part : $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et d'autre part : $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-3) = +\infty$

   donc par limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

   Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$.

3. **Existence et unicité d'une solution $\boldsymbol{\alpha}$ à $\boldsymbol{g(x) = 0}$ dans $\left]\mathbf{0};+\infty\right[$**

   • g est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ donc continue sur cet intervalle

   • g est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$ donc strictement monotone sur $\left]0;+\infty\right[$

   • 0 est compris entre $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

   <u>Résumons</u> :

   • g est continue sur $\left]0;+\infty\right[$

   • g est <u>strictement</u> monotone sur $\left]0;+\infty\right[$

   • 0 est compris entre $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires on en déduit qu'il existe un unique $\alpha \in]0;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

4. **Signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$**
   • si $x \in]0;\alpha[$, alors $0 < x < \alpha$, or g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
   donc elle conserve le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle, par conséquent :
   $g(x) < g(\alpha)$, et comme $g(\alpha) = 0$ on en déduit que : $g(x) < 0$
   • si $x = \alpha$, alors $g(x) = 0$
   • si $x \in]\alpha;+\infty[$, alors $\alpha < x$, or g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
   donc elle conserve le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle, par conséquent :
   $g(\alpha) < g(x)$, et comme $g(\alpha) = 0$ on en déduit que : $0 < g(x)$, autrement dit
   $g(x) > 0$

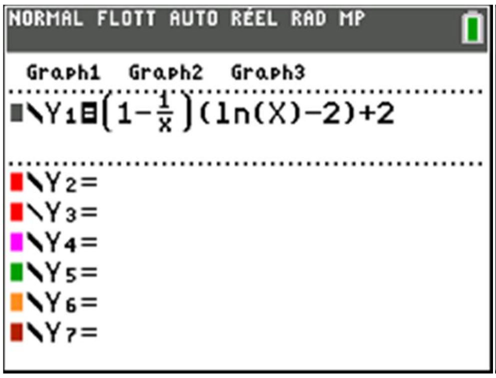
   Résumons :
   sur $]0;\alpha[$, $g(x) < 0$, $g(\alpha) = 0$, sur $]\alpha;+\infty[$, $g(x) > 0$

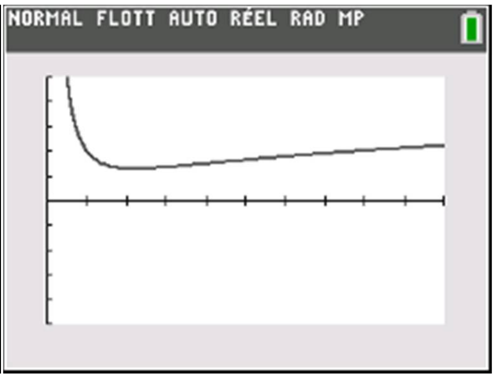
5. **Justifier que $2 < \alpha < 3$ puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.**
   $g(2) \approx -0{,}307 < 0$ et $g(3) \approx 1{,}098 > 0$ donc $\mathbf{2 < \alpha < 3}$.

   À l'aide de la calculatrice, on obtient :
   $g(2{,}207) \approx -0{,}001 < 0$ et $g(2{,}208) \approx 8{,}7 \times 10^{-5} > 0$ donc : $\mathbf{2{,}207 < \alpha < 2{,}208}$.

Partie B

$\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$





1. **Limite de f en 0**
   On a d'une part : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ $(cours)$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} [\ln(x) - 2] = -\infty$
   et d'autre part : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.
   Par limite d'un produit on en déduit :
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2)\right] = +\infty \text{, donc : } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2\right] = +\infty$$
   Conclusion : $\mathbf{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty}$.

2. a. Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

$\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2$

Rappel : $(uv)' = u'v + v'u$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + 0$$

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 2}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 2}{x^2} + \frac{x-1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 2 + x - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln(x) + x - 3}{x^2}$$

Or, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) = \ln(x) + x - 3$, donc :

$\boldsymbol{\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}$.

b. Sens de variation de f sur $]0;+\infty[$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $g(x)$.

En utilisant le tableau de signes de $g(x)$ obtenu à la question 4. Partie A :

• sur $]0;\alpha]$, $g(x) \leqslant 0$ donc $f'(x) \leqslant 0$ et comme $f'(x)$ ne s'annule qu'une fois on en déduit que **f est strictement décroissante sur $]0;\alpha]$**

• sur $[\alpha;+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$ et comme $f'(x)$ ne s'annule qu'une fois on en déduit que **f est strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$**.

Partie C

Repère orthogonal, $\mathcal{C}$: courbe représentative de f, $\mathcal{C}'$: courbe d'équation $y = \ln(x)$.

$\forall x \in]0;+\infty[, h(x) = f(x) - \ln(x)$

1. Démontrer que $\forall x \in]0;+\infty[$, on a : $h(x) = \frac{2-\ln(x)}{x}$.

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$h(x) = f(x) - \ln(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2 - \ln(x)$$

$$= \frac{x-1}{x}(\ln(x) - 2) + \frac{x(2 - \ln(x))}{x} = \frac{(x-1)(\ln(x) - 2) + 2x - x\ln(x)}{x}$$

$$= \frac{x\ln(x) - 2x - \ln(x) + 2 + 2x - x\ln(x)}{x} = \frac{2 - \ln(x)}{x}$$

<u>Conclusion</u> :

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $h(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}$

2. Signe de $h(x)$ sur $]0;+\infty[$ puis position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$

$\forall x \in]0;+\infty[$, on a $x > 0$ donc le signe de $h(x)$ est celui de son numérateur $2-\ln(x)$.
Cherchons pour quelles valeurs de x on a $2-\ln(x) > 0$.
Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a les équivalences :

$$2-\ln(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x) > -2 \Leftrightarrow \ln(x) < 2 \Leftrightarrow \ln(x) < \ln(e^2) \Leftrightarrow x < e^2$$

(pour $a > 0$ et $b > 0$ on a l'équivalence : $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$)
On en déduit :

x	0		e^2		$+\infty$
signe de $h(x)$	||	$+$	0	$-$	
position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$	||	$\mathcal{C}$ au-dessus de $\mathcal{C}'$		$\mathcal{C}$ en dessous de $\mathcal{C}'$	

3. Primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $]0;+\infty[$ puis primitive de h sur $]0;+\infty[$

Pour $x \in]0;+\infty[$, on pose $u(x) = \ln(x)$, alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.
On a :

$$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} \times \ln(x) = u'(x)u(x)$$

Or, une primitive de $u'u$ est $\frac{1}{2}u^2$ donc une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $]0;+\infty[$ est : $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln(x))^2$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[, h(x) = \dfrac{2-\ln(x)}{x} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x} = 2 \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x}$

donc en notant H une primitive de h sur $]0;+\infty[$ on a, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$H(x) = 2\ln(x) - \frac{1}{2}(\ln(x))^2$$

4. Calcul puis interprétation graphique de :

$$\boldsymbol{I = \int_1^{e^2} \frac{2-\ln(x)}{x}\, dx}$$

D'après ce qui précède, on a les égalités :

$$I = \int_1^{e^2} \frac{2-\ln(x)}{x}\, dx = \int_1^{e^2} h(x)\, dx = [H(x)]_1^{e^2} = H(e^2) - H(1)$$

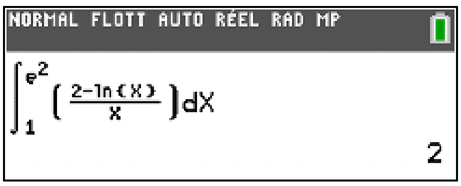
Or,

$$H(e^2) = 2\ln(e^2) - \frac{1}{2}(\ln(e^2))^2 = 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2^2 = 4 - \frac{1}{2} \times 4 = 4 - 2 = 2$$

$$H(1) = 2\ln(1) - \frac{1}{2}(\ln(1))^2 = 2 \times 0 - \frac{1}{2} \times 0^2 = 0 - 0 = 0$$

Donc : $I = 2$.

Vérification



Sur l'intervalle $[1; e^2]$ la courbe $\mathcal{C}$ est située au-dessus de la courbe $\mathcal{C}'$donc I est l'aire en unité d'aire du domaine plan situé entre ces deux courbes et les droites verticales d'équations respectives $x = 1$ et $x = e^2$.

Sujet $n°$ 04 **[d'après Antilles-Guyane Juin 2017, 1h]**

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif.
Le but de l'exercice est d'étudier l'équation d'inconnue le réel strictement positif x :

$$(E_n) : \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthogonal ainsi que les droites D_3, $\mathcal{D}_4$ et $\mathcal{D}_5$ d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{5}$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution α_n dans l'intervalle $[1;e]$.

2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).

a. Sur l'ANNEXE marquer sur l'axe des abscisses les nombres α_3, α_4 et α_5 puis conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).

b. Soit $n \geqslant 3$, comparer $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$, en déduire le sens de variation de (α_n).

c. Montrer que (α_n) est convergente. Il n'est pas demandé de déterminer sa limite.

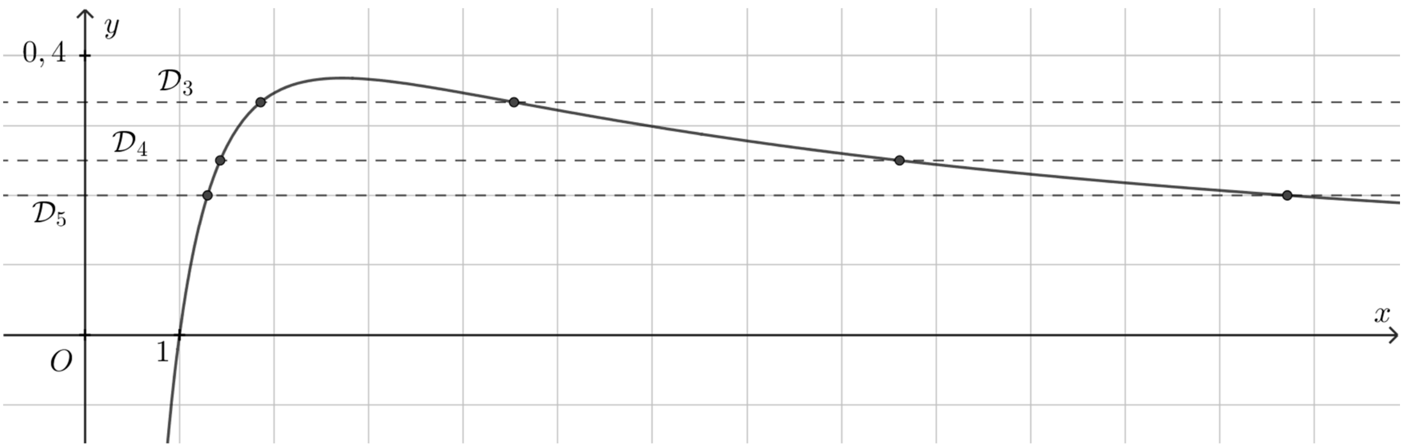
3. On admet que pour tout $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que : $1 \leqslant \alpha_n \leqslant e \leqslant \beta_n$ et que la suite (β_n) est croissante.

a. Sur l'ANNEXE marquer sur l'axe des abscisses les nombres β_3, β_4 et β_5

b. Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a : $\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}$.

c. En déduire la limite de la suite (β_n).

<u>ANNEXE</u>



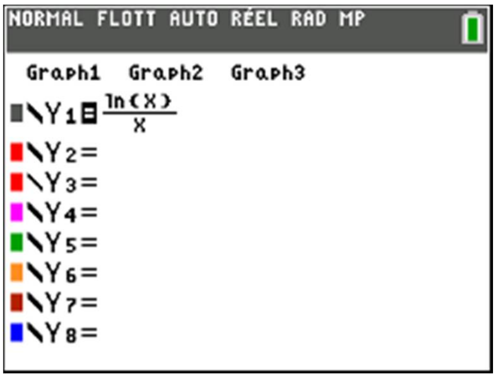
Corrigé

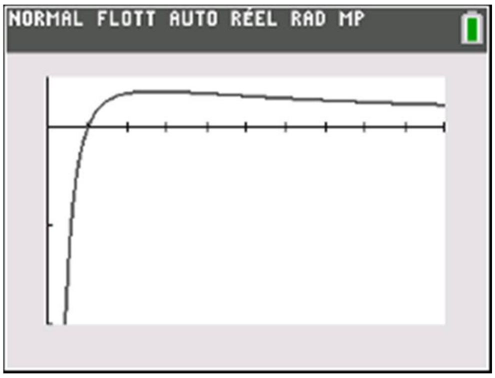
n est un entier naturel strictement positif.

$(E_n) : \dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{n}$

Partie A

$\forall x \in \,]0;+\infty[, f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$





On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

En ANNEXE : la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. **Étudier les variations de f**

   $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

   Rappels : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

   $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2}$

   $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$

   $\forall x \in \,]0;+\infty[, \boldsymbol{f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}}$

   Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $1 - \ln(x)$. Cherchons pour quelles valeurs de x on a $1 - \ln(x) > 0$.

   Pour $x \in \,]0;+\infty[$, on a les équivalences :

   $$1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x) > -1 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow \ln(x) < \ln(e) \Leftrightarrow x < e$$

   ($a > 0$ et $b > 0$ on a l'équivalence : $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$)

   Résumons :

   • $f'(x) \geqslant 0$ sur $]0, e]$ et ne s'annule qu'en e donc f est strictement croissante sur cet intervalle

   • $f'(x) \leqslant 0$ sur $[e;+\infty[$ et ne s'annule qu'en e donc f est strictement décroissante sur cet intervalle

2. **Maximum de f sur $]0;+\infty[$**

   D'après la question précédente, f admet pour maximum $f(e)$ sur $]0;+\infty[$.

Or, $f(e)=\dfrac{\ln(e)}{e}=\dfrac{1}{e}$.

Conclusion : f admet pour maximum $\dfrac{1}{e}$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

1. **Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ possède une unique solution α_n dans l'intervalle $[1;e]$.**

   • on a d'une part :
$$f(1)=\frac{\ln(1)}{1}=0<\frac{1}{n}$$
   et d'autre part :
$$f(e)=\frac{\ln(e)}{e}=\frac{1}{e}$$
   or, $n \geqslant 3$ et $e \approx 2{,}7$ donc $n>e$ puis : $\frac{1}{n}<\frac{1}{e}$, donc : $f(e)>\frac{1}{n}$

   • f est dérivable donc continue sur $]0;+\infty[$, donc f est continue sur $[1;e]$

   • f est strictement croissante sur $]-\infty;1]$, donc f est strictement monotone sur $[1;e]$

   Résumons :

   • f est continue sur $[1;e]$

   • f est strictement monotone sur $[1;e]$

   • $\dfrac{1}{n}$ est compris entre $f(1)$ et $f(e)$

   donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires on en déduit que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une unique solution α_n dans $[1;e]$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).

   a. **Sur l'ANNEXE marquer sur l'axe des abscisses les nombres α_3, α_4 et α_5 puis conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).**
   Conjecture : « la suite (α_n) est strictement décroissante ».

   b. **Pour $n \geqslant 3$ comparer $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$, en déduire le sens de variation de (α_n)**
   Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$.
   On a : $f(\alpha_n)=\dfrac{\ln(\alpha_n)}{\alpha_n}=\dfrac{1}{n}$ (par définition de (α_n)), et de même $f(\alpha_{n+1})=\dfrac{1}{n+1}$.
   Or, $3 \leqslant n<n+1$ donc : $\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$, c'est-à-dire : $f(\alpha_n)>f(\alpha_{n+1})$ $(*)$.

   Supposons $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$: α_n et α_{n+1} appartiennent à $[1;e]$ sur lequel f est strictement croissante donc conserve le sens de la relation d'ordre, par conséquent $f(\alpha_n) \leqslant f(\alpha_{n+1})$ ce qui est incompatible avec la relation d'ordre $(*)$ donc il faut rejeter la supposition $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$, par conséquent on peut affirmer que $\alpha_n>\alpha_{n+1}$.
   $\forall n \geqslant 3$, $\alpha_n>\alpha_{n+1}$ donc : $(\boldsymbol{\alpha_n})$ **est strictement décroissante**.

c. **Montrer que (α_n) est convergente. Il n'est pas demandé de déterminer sa limite.**
Pour tout $n \geqslant 3$, on a $\alpha_n \in [1;e]$ donc $1 \leqslant \alpha_n$: la suite (α_n) est minorée par la constante 1.
La suite (α_n) est décroissante et minorée donc d'après le théorème de convergence monotone elle est convergente.

3. On admet que pour tout $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que : $1 \leqslant \alpha_n \leqslant e \leqslant \beta_n$ et que la suite (β_n) est croissante.

a. **Sur l'ANNEXE marquer sur l'axe des abscisses les nombres $\boldsymbol{\beta_3}$, $\boldsymbol{\beta_4}$ et $\boldsymbol{\beta_5}$.**

b. **Établir que, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ supérieur ou égal à 3, on a : $\boldsymbol{\beta_n \geqslant n\dfrac{\beta_3}{3}}$.**

Soit $n \geqslant 3$.
On a : $1 \leqslant \beta_n$ et $f(\beta_n) = \dfrac{\ln(\beta_n)}{\beta_n} = \dfrac{1}{n}$, qui donne : $\ln(\beta_n) = \dfrac{\beta_n}{n}$.
De même : $\ln(\beta_3) = \dfrac{\beta_3}{3}$.
Or, (β_n) est croissante donc minorée par son premier terme β_3, d'où : $\beta_n \geqslant \beta_3$.
En prenant le logarithme népérien de chaque membre : $\ln(\beta_n) \geqslant \ln(\beta_3)$.
Or, $\ln(\beta_n) = \dfrac{\beta_n}{n}$ et $\ln(\beta_3) = \dfrac{\beta_3}{3}$ donc : $\dfrac{\beta_n}{n} \geqslant \dfrac{\beta_3}{3}$, puis : $\dfrac{\beta_n}{n} \times n \geqslant \dfrac{\beta_3}{3} \times n$,
autrement dit : $\beta_n \geqslant n\dfrac{\beta_3}{3}$.

<u>Conclusion</u>

$\boldsymbol{\forall n \geqslant 3, \beta_n \geqslant n\dfrac{\beta_3}{3}}$

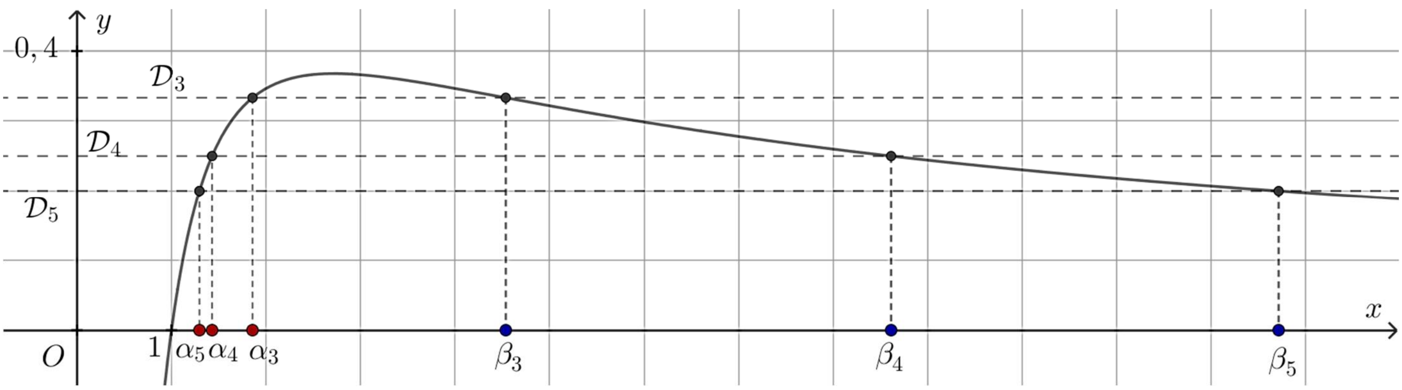
b. **En déduire la limite de la suite $(\boldsymbol{\beta_n})$.**

On a : $\beta_3 > 0$ et $3 > 0$, donc : $\dfrac{\beta_3}{3} > 0$.
On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n \times \frac{\beta_3}{3}\right) = +\infty$$

Or, pour tout $n \geqslant 3$ on a : $\beta_n \geqslant n \times \dfrac{\beta_3}{3}$, donc d'après le théorème de comparaison on en déduit que : **la suite $(\boldsymbol{\beta_n})$ diverge vers $+\infty$.**

<u>ANNEXE</u>



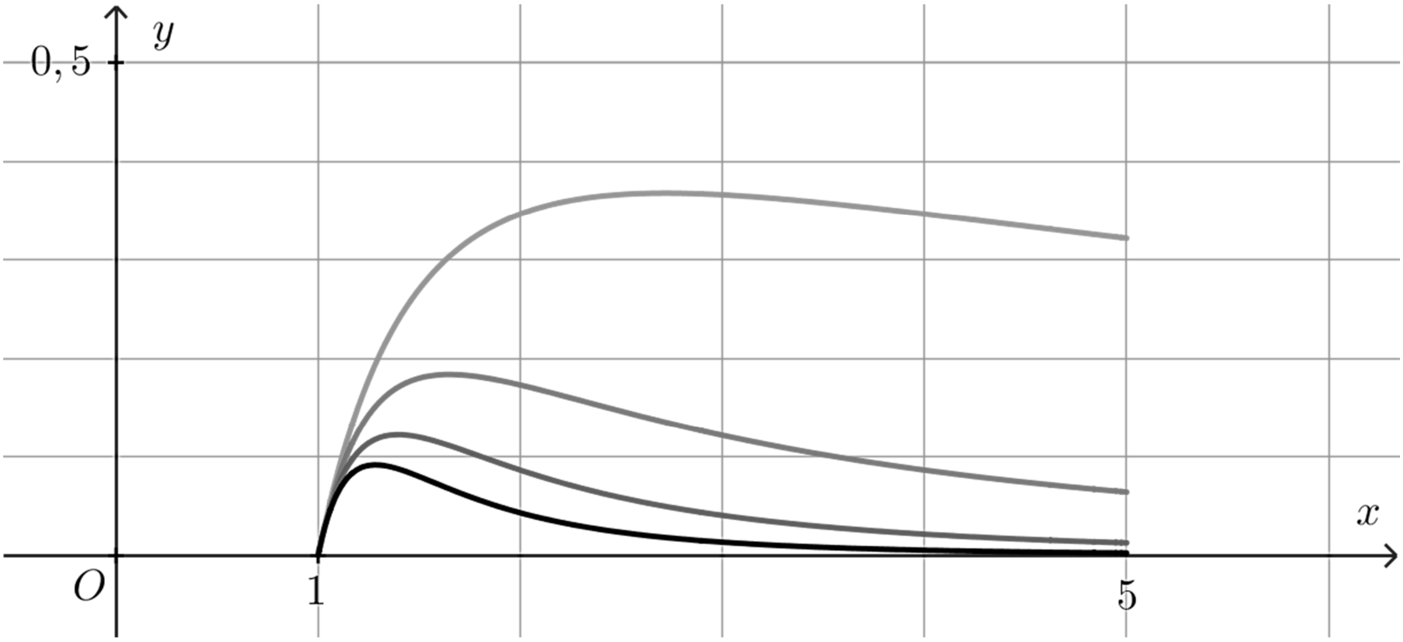
Sujet $n°$ 05 **[Liban Mai 2018 1h20]**

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1\,;5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}$$

On admet que f_n est dérivable sur $[1\,;5]$.

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal. Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathcal{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\,;2\,;3\,;4\}$:



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;5]$:

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur $[1\,;5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation :

$$y = \frac{1}{e}\ln(x)$$

3. a. Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;5]$:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}$$

b. Montrer que pour tout entier $n > 1$:

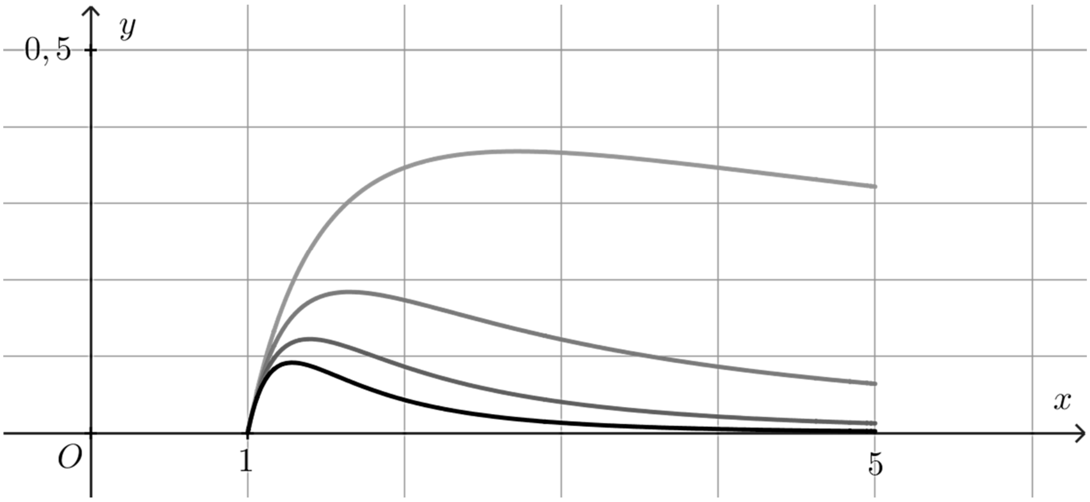
$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

c. Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_n$.
Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé

Pour tout entier $n > 0$:

- f_n est définie sur $[1\,;5]$ par : $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n}$
- $\mathcal{C}_n$ est la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal
- sont représentées les courbes $\mathcal{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\,;2\,;3\,;4\}$:



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;5]$:

$$\boldsymbol{f'_n(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}}$$

$f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n}$

Rappel : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}, \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$

$f_n'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^n - nx^{n-1} \times \ln(x)}{(x^n)^2}$

$f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1} - nx^{n-1}\ln(x)}{x^{2n}}$

$f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}(1 - n\ln(x))}{x^{n-1}x^{2n-(n-1)}}$

$f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{2n-n+1}}$

$\boldsymbol{\forall x \in [1\,;5], f'_n(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}}$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur $[1\,;5]$.
On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation :

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{e}\ln(x)}$$

Le signe de $f_n'(x)$ donne le sens de variation de f_n.

Pour tout $x \in [1\,;5]$, $x > 0$ donc $x^{n+1} > 0$ par conséquent le signe de $f_n'(x)$ est celui de son numérateur : $1 - n\ln(x)$.

Cherchons pour quelles valeurs de x on a : $1 - n\ln(x) > 0$.

Pour tout $x \in [1\,;5]$ on a les équivalences :

$$1 - n\ln(x) > 0 \Leftrightarrow -n\ln(x) > -1 \Leftrightarrow n\ln(x) < 1 \Leftrightarrow \ln(x) < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln(x) < \ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)$$

$\Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{n}}$

($a > 0$ et $b > 0$ on a l'équivalence : $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$)

$n \geqslant 1$ donc : $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{1} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} < 1 \Leftrightarrow e^0 < e^{\frac{1}{n}} < e^1 \Leftrightarrow 1 < e^{\frac{1}{n}} < e$

Or $e \approx 2{,}718$, donc : $1 < e^{\frac{1}{n}} < 2{,}719 < 5$, par conséquent : $e^{\frac{1}{n}} \in [1\,;5]$.

On a :

- sur $\left[1\,;e^{\frac{1}{n}}\right]$, $f_n'(x) \geqslant 0$ et comme f_n' ne s'annule qu'une fois on en déduit que f_n est strictement croissante sur cet intervalle
- sur $\left[e^{\frac{1}{n}}\,;5\right]$, $f_n'(x) \leqslant 0$ et comme f_n' ne s'annule qu'une fois on en déduit que f_n est strictement décroissante sur cet intervalle

Il résulte des deux points précédents que f_n admet pour maximum $f_n\left(e^{\frac{1}{n}}\right)$.

On a :

$$f_n\left(e^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}\times n}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^1} = \frac{\frac{1}{n}}{e} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{n \times e}$$

On a donc, avec les notations de l'exercice : $A_n\left(e^{\frac{1}{n}}\,;\,\frac{1}{n\times e}\right)$.

Montrons que A_n appartient à la courbe d'équation $y = \frac{1}{e}\ln(x)$:

$$\frac{1}{e} \times \ln(x_{A_n}) = \frac{1}{e} \times \ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{e} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n \times e} = y_{A_n}$$

On a : $y_{A_n} = \frac{1}{e}\ln(x_{A_n})$ donc **A_n appartient à la courbe d'équation $y = \frac{1}{e}\ln(x)$**.

3. a. Montrons que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;5]$:

$$\mathbf{0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}}$$

Soit $x \in [1\,;5]$, on a : $1 \leqslant x \leqslant 5$, or la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc elle conserve le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle, par conséquent : $\ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$. Comme $\ln(1) = 0$ on obtient : $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$, puis en divisant par $x^n > 0$:

$$\frac{0}{x^n} \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}$$

autrement dit :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}$$

<u>Conclusion</u>

$\forall n$ entier tel que $n > 1$ et $\forall x \in [1\,;5]$, on a :

$$\mathbf{0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}}$$

b. Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\boldsymbol{\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)}$$

Soit n un entier tel que $n > 1$, on a :

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^5 x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^5 = \left[\frac{1}{-n+1}\,\frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^5 = \frac{1}{-n+1}\left[\frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^5$$

$$= \frac{1}{-(n-1)}\left(\frac{1}{5^{n-1}}-\frac{1}{1^{n-1}}\right) = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{5^{n-1}}-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{1}{5^{n-1}}+1\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

On a donc bien, pour tout entier $n > 1$:

$$\boldsymbol{\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)}$$

c. Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_n$. Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.

$\forall x \in [1\,;5]$, $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n}$

f_n est positive sur $[1\,;5]$ donc l'aire du domaine situé sous la courbe exprimé en $u.a.$ est :

$$\int_1^5 f_n(x)dx = \int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n}dx$$

Or, pour tout $x \in [1\,;5]$ on a montré en **a.** que :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}$$

donc en intégrant dans l'<u>ordre croissant des bornes</u> :

$$\int_1^5 0\,dx \leqslant \int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n}\,dx \leqslant \int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n}\,dx$$

c'est-à-dire :

$$0 \leqslant \int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n}\,dx \leqslant \ln(5)\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx$$

Or, on a montré en **b.** que :

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

donc :

$$0 \leqslant \int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n}\,dx \leqslant \ln(5)\times\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

Rappelons que, si $q > 1$, alors $\lim\limits_{N\to+\infty} q^N = +\infty$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^{n-1} = \lim\limits_{N\to+\infty} 5^N = +\infty$

donc, par limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{5^{n-1}}=0$, puis : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)=1$.

D'autre part, par limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}=0$.

Par limite d'un produit on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\ln(5)\times\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)\right]=0$$

Résumons :

$$\begin{cases}\forall n>1,\text{ on a : }0\leqslant\displaystyle\int_1^5\frac{\ln(x)}{x^n}\,dx\leqslant\ln(5)\times\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)\\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty}0=\lim_{n\to+\infty}\left[\ln(5)\times\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)\right]=0\end{cases}$$

donc d'après le théorème des gendarmes on en déduit que :

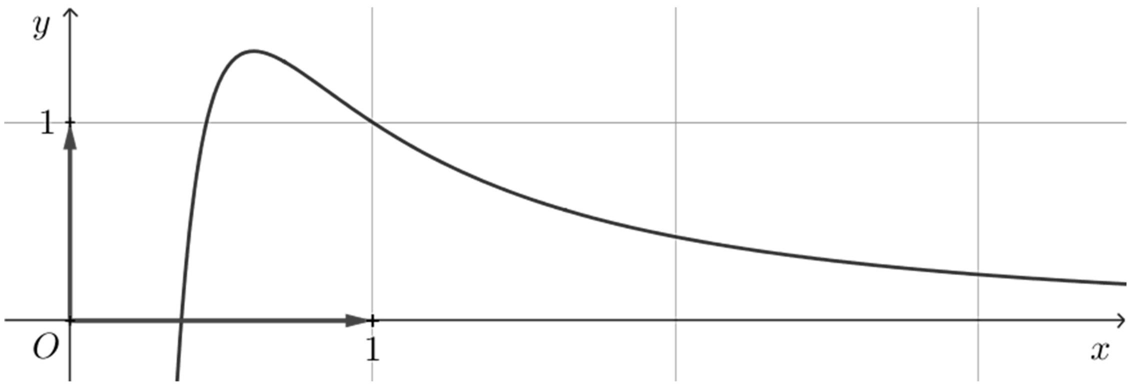
$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}\int_1^5\frac{\ln(x)}{x^n}\,dx=0}$$

Sujet $n°$ 06 **[d'après Amérique du Nord Mai 2013 1h15]**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

On donne ci-dessous sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal du plan :



1. **a.** Déterminer la limite de f en 0, interpréter en terme d'asymptote.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$, interpréter en terme d'asymptote.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

   b. Démontrer que f admet un maximum sur $]0; +\infty[$ et préciser ce maximum.

3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, en préciser les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.

   a. Pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, on pose :

$$F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$$

   Montrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

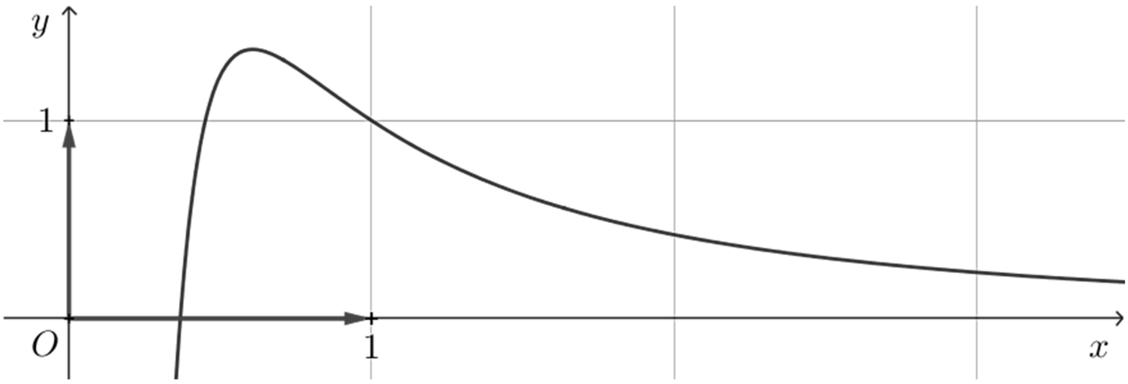
   b. Exprimer I_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de I_n et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Corrigé

$\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$

Courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal du plan :



1. a. **Limite de f en 0, interprétation en terme d'asymptote**

   On a d'une part : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$ $(cours)$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (1+\ln(x)) = -\infty$.

   D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2 = 0^+$ $(cours)$

   donc par limite d'un quotient : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1+\ln(x)}{x^2} = -\infty$.

   <u>Conclusion</u> : $\boldsymbol{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty}$.

   On en déduit que **la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale de $\mathcal{C}$**.

   b. **Limite de f en $+\infty$, interprétation en terme d'asymptote**

   Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

   On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $(cours)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ $(cours)$ donc par limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   On en déduit que **la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale de $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$**.

2. a. **Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$:**

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}}$$

$f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$

Rappels : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{\left(0+\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(1+\ln(x))}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x - 2x(1+\ln(x))}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x(1-2(1+\ln(x))}{x \times x^3}$$

$$f'(x) = \frac{1-2-2\ln(x)}{x^3}$$

$$\forall \boldsymbol{x} \in \left]\mathbf{0};+\infty\right[, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{-1-2\ln(x)}}{\boldsymbol{x^3}}$$

b. Maximum de f sur $]0;+\infty[$

Pour tout $x \in \left]0;+\infty\right[$, on a : $x > 0$ donc : $x^3 > 0$, par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $-1-2\ln(x)$.

Cherchons pour quelles valeurs de x on a : $-1-2\ln(x) > 0$.

Pour $x \in \left]0;+\infty\right[$ on a les équivalences :

$$-1-2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow -2\ln(x) > 1 \Leftrightarrow 2\ln(x) < -1 \Leftrightarrow \ln(x) < -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) < \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}$$

(pour $a > 0$, $b > 0$ on a l'équivalence : $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$)

<u>Résumons</u> :

• sur $\left]0\,;e^{-\frac{1}{2}}\right]$, $f'(x) \geqslant 0$ et ne s'annule qu'une fois donc f est strictement croissante sur cet intervalle

• sur $\left[e^{-\frac{1}{2}}\,;+\infty\right[$, $f'(x) \leqslant 0$ et ne s'annule qu'une fois donc f est strictement décroissante sur cet intervalle

On en déduit que f admet un maximum sur $\left]0;+\infty\right[$, à savoir

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{e^{-\frac{1}{2}\times 2}} = \frac{\frac{1}{2}}{e^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{2}\times\frac{e}{1} = \boldsymbol{\frac{e}{2}}$$

3. a. Montrer que $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, en préciser les coordonnées.

Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Pour $x \in \left]0;+\infty\right[$, on a les équivalences :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+\ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1+\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(e^{-1})$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1}$$

$\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, de coordonnées $(e^{-1};0)$.

b. Signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$

• f est strictement croissante sur $\left]0;e^{-\frac{1}{2}}\right[$ et $\left]0;e^{-1}\right[\subset \left]0;e^{-\frac{1}{2}}\right[$ donc f est strictement croissante sur $\left]0;e^{-1}\right[$ donc elle conserve le sens de la relation d'ordre ; or, pour $x \in \left]0;e^{-\frac{1}{2}}\right[$ on a : $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$, donc : $f(x) < f(e^{-\frac{1}{2}})$ et comme $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 0$ on en déduit : $f(x) < 0$.

• f ne s'annule pas sur $\left]e^{-1};+\infty\right[$ et est continue sur cet intervalle donc $f(x)$ garde un signe constant sur cet intervalle, or $e^{-\frac{1}{2}} \in \left]e^{-1};+\infty\right[$ et $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{e}{2} > 0$

<u>Résumons</u> : $\forall \boldsymbol{x} \in \left]\mathbf{0};\boldsymbol{e^{-1}}\right[, \boldsymbol{f(x) < 0}$ et $\forall \boldsymbol{x} \in \left]\boldsymbol{e^{-1}};+\infty\right[, \boldsymbol{f(x) > 0}$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.

a. Pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, on pose : $F(x) = \frac{-2-\ln(x)}{x}$.

Montrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

F est différence et quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ donc elle est dérivable sur son domaine de définition $]0; +\infty[$.

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$$F'(x) = \frac{\left(-0 - \frac{1}{x}\right)x - 1(-2 - \ln(x))}{x^2}$$

$$F'(x) = \frac{-1 + 2 + \ln(x)}{x^2}$$

$$F'(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

Or, pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$, donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, $F'(x) = f(x)$, autrement dit **F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.**

b. Exprimer I_n en fonction de n.

La fonction f étant positive sur $[\frac{1}{e}\,; n]$, on a :

$$I_n = \int_{\frac{1}{e}}^{n} f(x)dx = [F(x)]_{\frac{1}{e}}^{n} = F(n) - F\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-2 - \ln(n)}{n} - \frac{-2 - \ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}}$$

$$= \frac{-2 - \ln(n)}{n} - (-2 - \ln(e^{-1})) \times e = -\frac{2}{n} - \frac{\ln(n)}{n} - \big(-2 - (-1)\big) \times e$$

$$= -\frac{2}{n} - \frac{\ln(n)}{n} + e = e - \frac{2}{n} - \frac{\ln(n)}{n}$$

Conclusion :

$$\forall n \geqslant 1, I_n = e - \frac{2}{n} - \frac{\ln(n)}{n}$$

c. Limite de I_n et interprétation graphique

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0\ (cours)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0\ (cours)$ donc par limite d'une différence, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(e - \frac{2}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\right) = e$$

Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = e}$.

Le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et qui est situé à droite de la droite d'équation $x = 1$ a pour aire : ***e* unités d'aire**.