Préparation bac : étude de fonction

Ex 01** **[d'après Polynésie Sept 2011] 5 points**

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2 e^{-x} \text{ et } g(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2$$

On note respectivement $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentatives de f et de g dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Les courbes sont tracées en annexe.

1. a. **Déterminer les coordonnées des points communs à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.**
   b. **Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sur $\mathbb{R}$.**
2. a. **À l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer :**

$$\int_0^1 f(x)dx$$

   b. **Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.**

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

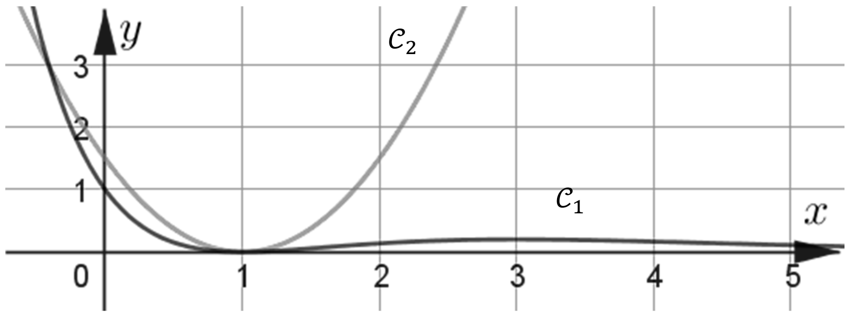
$$u_n = \int_0^1 (x-1)^{2n} e^{-x} dx$$

1. **Démontrer que, pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:**

$$0 \leqslant (x-1)^{2n} e^{-x} \leqslant (x-1)^{2n}$$

   En déduire que : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}$.
2. **En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.**

ANNEXE



Corrigé

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2 e^{-x} \text{ et } g(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2$$

On note respectivement $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentatives de f et de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Les courbes sont tracées en annexe.

1. a. **Coordonnées des points communs à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$**

Les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Avec les notations de l'exercice, on a les équivalences :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2 e^{-x} = \frac{3}{2}(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 e^{-x} - \frac{3}{2}(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(e^{-x} - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \;\; ou \;\; e^{-x} - \frac{3}{2} = 0$$

Or,

• $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f(1) = (1-1)e^{-1} = 0 \times e^{-1} = 0 \;\; (= g(1) \dots)$

• $e^{-x} - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^{-x} = e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

$g\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right) - 1\right)^2 \;\; \left(= f\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)\dots\right)$

Conclusion :

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont deux points en commun :

$$\boldsymbol{A\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right); \frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right) - 1\right)^2\right) \text{ et } B(1;0)}$$

   b. **Positions relatives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$**

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$.

On a :

$$h(x) = (x-1)^2 e^{-x} - \frac{3}{2}(x-1)^2 = (x-1)^2\left(e^{-x} - \frac{3}{2}\right)$$

Il s'agit d'étudier le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

• **étude de $(x-1)^2$**

Un carré est toujours positif ou nul donc $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geqslant 0$.
De plus, $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

• **étude de $e^{-x} - \frac{3}{2}$**

On a les équivalences :

$$e^{-x} - \frac{3}{2} > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^{-x} > e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \Leftrightarrow -x > \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x < -\ln\left(\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

• **tableau de signes de $h(x) = f(x) - g(x)$**

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{2}{3}\right)$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	
$e^{-x} - \frac{3}{2}$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Sur $\left]-\infty; \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right[$, $\mathcal{C}_1$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_2$

Sur $\left]\ln\left(\frac{2}{3}\right); 1\right[$ et sur $]1; +\infty[$, $\mathcal{C}_1$ est strictement en dessous de $\mathcal{C}_2$

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent aux points d'abscisses $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ et 1

2. a. À l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer :

$$\int_0^1 f(x)dx$$

Il s'agit de calculer :

$$I = \int_0^1 (x-1)^2 e^{-x} dx$$

On pose :

$u(x) = (x-1)^2$ $\qquad$ $v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 2(x-1)$ $\qquad$ $v(x) = -e^{-x}$ convient

Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0; 1]$ donc on peut utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx$$

$$\int_0^1 (x-1)^2 e^{-x} dx = [-e^{-x}(x-1)^2]_0^1 - \int_0^1 2(x-1)(-e^{-x})dx$$
$$I = -e^{-1}(1-1)^2 + e^{-0}(0-1)^2 + 2\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$$

$I = 1 + 2K$ $(*)$ avec $K = \int_0^1 (x-1)e^{-x}dx$.

On pose :

$u(x) = x - 1$ $\qquad$ $v'(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 1$ $\qquad$ $v(x) = -e^{-x}$ convient

Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0; 1]$ donc on peut utiliser la formule d'intégration par parties :

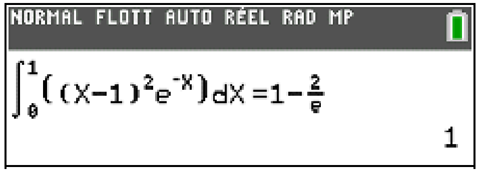
$$\int_0^1 u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx$$
$$\int_0^1 (x-1)e^{-x}dx = [-(x-1)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 1(-e^{-x})dx$$
$$K = -(1-1)e^{-1} + (0-1)e^{-0} - [e^{-x}]_0^1$$
$$K = -0 - 1 - (e^{-1} - e^0) = -1 - \left(\frac{1}{e} - 1\right) = -1 - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{1}{e}$$

Remplaçons dans $(*)$:

$$I = 1 + 2\left(-\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{2}{e}$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boldsymbol{\int_0^1 f(x)dx = 1 - \frac{2}{e}}$$



b. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Sur $[0; 1]$, $\mathcal{C}_2$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_1$ donc l'aire en $u.a.$ du domaine délimité par les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est :

$$K = \int_0^1 (g(x) - f(x))dx = \int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$$

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication <u>obligatoire</u> de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

$$= \int_0^1 \frac{3}{2} \times 1(x-1)^2 dx - \left(1 - \frac{2}{e}\right) = \frac{3}{2}\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 dx - 1 + \frac{2}{e}$$
$$= \frac{1}{2}[(x-1)^3]_0^1 - 1 + \frac{2}{e} = \frac{1}{2}((1-1)^3 - ((0-1)^3) - 1 + \frac{2}{e}$$
$$= \frac{1}{2}(0+1) - 1 + \frac{2}{e} = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} + \frac{2}{e} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{e} = \frac{2}{e} - \frac{1}{2}$$

L'aire demandée est : $\left(\frac{2}{e} - \frac{1}{2}\right)$ $\boldsymbol{u.a.}$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (x-1)^{2n} e^{-x} dx$$

1. **Démontrer que, pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:**

$$\boldsymbol{0 \leqslant (x-1)^{2n} e^{-x} \leqslant (x-1)^{2n}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $x \in [0;1]$, on a : $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc : $0 \geqslant -x \geqslant -1$

puis : $e^0 \geqslant e^{-x} \geqslant e^{-1}$, d'où : $1 \geqslant e^{-x} \geqslant 0$, c'est-à-dire : $0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$,

puis en multipliant par $(x-1)^{2n} \geqslant 0$:

$$(x-1)^{2n} 0 \leqslant (x-1)^{2n} e^{-x} \leqslant (x-1)^{2n}$$
$$0 \leqslant (x-1)^{2n} e^{-x} \leqslant (x-1)^{2n}$$

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}$

En intégrant dans l'ordre croissant des bornes, on obtient :

$$\int_0^1 0 dx \leqslant \int_0^1 (x-1)^{2n} e^{-x} dx \leqslant \int_0^1 (x-1)^{2n} dx$$
$$0 \leqslant \int_0^1 (x-1)^{2n} e^{-x} dx \leqslant \left[\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$$

Or,

$$\left[\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{(1-1)^{2n+1}}{2n+1} - \frac{(0-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{0^{2n+1}}{2n+1} - \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

Remarquons que $2n+1$ est un entier impair donc $(-1)^{2n+1} = -1$, donc :

$$\left[\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

Finalement : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}$.

Conclusion :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \boldsymbol{0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}}$$

2. **En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.**

On a démontré à la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} (2n+1) = +\infty$, donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = \lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{N} = 0$ $(cours)$.

On a :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2n+1} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0 \end{cases}$$

donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

Ex 02* [d'après Liban Mai 2011] 7 points**

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x + e^{-x}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A

1. **Étudier les variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.**
2. **Déterminer la limite de f en $+\infty$.**
3. **Soit d la droite d'équation réduite $y = x$.**
   a. **Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et d.**
   b. **Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x)$, en donner une interprétation pour d.**

Partie B

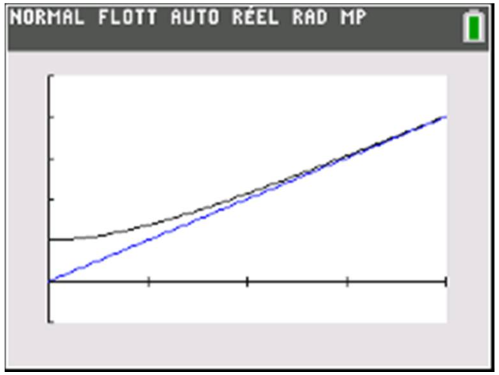
On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par son premier terme $u_1 = 0$ et pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}$.

1. **Démontrer que : $\forall x \in [0;+\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$.**
2. **En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.**
3. **Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : f(\ln(n)) = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.**
4. **Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*: \ln(n) \leqslant u_n$.**
5. **En déduire la limite de la suite (u_n).**

   Dans la suite de l'exercice on admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$.

6. a. **Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :**
   $$\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}dx$$
   b. **En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :**
   $$u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$$
7. **Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que :**
   $$\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$$
   Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

Corrigé



Partie A

1. **Variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$**

   $f(x) = x + e^{-x}$
   Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $[0;+\infty[$.
   f est somme de ces deux fonctions donc elle est dérivable sur $[0;+\infty[$.
   Rappel : $(e^u)' = u'e^u$
   $f'(x) = 1 + (-1)e^{-x}$
   $f'(x) = 1 - e^{-x}$
   Pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a : $x \geqslant 0, -x \leqslant 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leqslant e^0 \Leftrightarrow e^{-x} \leqslant 1$
   $\Leftrightarrow -e^{-x} \geqslant -1 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} \geqslant 0$
   $\forall x \in [0;+\infty[, f'(x) \geqslant 0$ donc **f est croissante sur $[0;+\infty[$.**

2. **Limite de f en $+\infty$**

   $f(x) = x + e^{-x}$
   On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0\ (cours)$.
   D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$,
   Par limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x + e^{-x}) = +\infty$, c'est-à-dire :
   $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

3. Soit d la droite d'équation réduite $y = x$.
   a. **Position relative de $\mathcal{C}$ et d**
   Pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a : $f(x) - x = x + e^{-x} - x = e^{-x}$.
   Or, pour tout $a \in \mathbb{R}, e^a > 0$ donc pour tout $x \in [0;+\infty[, e^{-x} > 0$
   donc : $\forall x \in [0;+\infty[,\ f(x) - x > 0$ par conséquent **$\mathcal{C}$ est toujours située strictement au-dessus de d.**

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ **et interprétation pour d**

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0\ (cours)$.

Résumons : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0}$.

On en déduit que $\boldsymbol{d}$ **est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au voisinage de** $+\infty$.

Partie B

(u_n) à termes positifs, $u_1=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1}=f(u_n)=u_n+e^{-u_n}$.

1. **Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul : $\ln(1+x)\leqslant x$.**

Pour tout $x\geqslant 0$, on pose : $h(x)=\ln(1+x)-x$.

h est dérivable sur $[0;+\infty[$ et :

$$h'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{1}{1+x}-\frac{1+x}{1+x}=\frac{1-(1+x)}{1+x}=\frac{1-1-x}{1+x}=\frac{-x}{1+x}$$

Or, sur $[0;+\infty[$ on a $x\geqslant 0$ donc $-x\leqslant 0$, et comme $1+x>0$ on en déduit $h'(x)\geqslant 0$ sur $[0;+\infty[$ par conséquent h est décroissante sur $[0;+\infty[$, donc elle inverse le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle.

Comme $\forall x\in[0;+\infty[$, on a : $0\leqslant x$, on en déduit : $h(0)\geqslant h(x)$.

Or, $h(0)=\ln(1+0)-0=\ln(1)=0$ et $h(x)=\ln(1+x)-x$

donc : $\forall x\in[0;+\infty[, 0\geqslant\ln(1+x)-x$, c'est-à-dire : $\ln(1+x)\leqslant x$.

Conclusion : $\boldsymbol{\forall x\in[0;+\infty[, \ln(1+x)\leqslant x}$.

2. **En déduire que, $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\ln(n+1)\leqslant\ln(n)+\dfrac{1}{n}$.**

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}\in[0;+\infty[$ donc d'après la question **1.** :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}$$

Or, on a les équivalences :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\Leftrightarrow\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\Leftrightarrow\ln(n+1)-\ln(n)\leqslant\frac{1}{n}$$
$$\Leftrightarrow\ln(n+1)\leqslant\ln(n)+\frac{1}{n}$$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N}^* : \ln(n+1)\leqslant\ln(n)+\dfrac{1}{n}}$

3. **Démontrer que, $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $f(\ln(n))=\ln(n)+\dfrac{1}{n}$.**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $n\geqslant 1$ donc $\ln(n)\geqslant\ln(1)$ autrement dit : $\ln(n)\geqslant 0$.

Comme pour tout $x\geqslant 0$, $f(x)=x+e^{-x}$, on en déduit :

$$f(\ln(n))=\ln(n)+e^{-\ln(n)}=\ln(n)+\frac{1}{e^{\ln(n)}}=\ln(n)+\frac{1}{n}$$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N}^*, f(\ln(n))=\ln(n)+\dfrac{1}{n}}$.

4. **Démontrer par récurrence que, $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $\ln(n)\leqslant u_n$.**

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la proposition P_n : « $\ln(n)\leqslant u_n$ ».

• initialisation

$\ln(1)=0$ et $u_1=0$ donc $\ln(1)\leqslant u_1$: P_1 est vraie.

• hérédité

Supposons que P_k : $\ln(k)\leqslant u_k$ est vraie pour un certain $k\geqslant 1$ et montrons que P_{k+1} : $\ln(k+1)\leqslant u_{k+1}$ est vraie.

$0\leqslant\ln(k)\leqslant u_k$, or f étant croissante sur $[0;+\infty[$ elleconserve le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle, donc : $f(0)\leqslant f(\ln(k))\leqslant f(u_k)$.

Or, $f(\ln(k))=\ln(k)+\dfrac{1}{k}$ d'après **3.** et $f(u_n)=u_{k+1}$ donc :

$$\ln(k)+\frac{1}{k}\leqslant u_{k+1}$$

D'après **2.**, $\ln(k+1)\leqslant\ln(k)+\frac{1}{k}$ donc : $\ln(k+1)\leqslant\ln(k)+\frac{1}{k}\leqslant u_{k+1}$

d'où : $\ln(k+1)\leqslant u_{k+1}$, autrement dit P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $P_n$est vraie, autrement dit : $\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N}^*, \ln(n)\leqslant u_n}$.

5. **En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.**

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n)=+\infty\ (cours)$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*, \ln(n)\leqslant u_n$ donc d'après le théorème de comparaison on en déduit que : $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$.

Dans la suite de l'exercice on admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n\leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}$.

6. **a. Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :**

$$\boldsymbol{\frac{1}{k}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx}$$

Soit k un entier naturel, $k\geqslant 2$.

Pour tout x tel que $k-1\leqslant x\leqslant k$, on a : $1\leqslant k-1\leqslant x\leqslant k$ donc par passage aux inverses : $\frac{1}{k-1}\geqslant\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{k}$, autrement dit : $\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{k-1}$.

En intégrant dans l' ordre croissant des bornes, on obtient :

$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\,dx\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k-1}\,dx$$

d'où :

$$\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\,dx\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx\Leftrightarrow\left[\frac{1}{k}x\right]_{k-1}^{k}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx$$

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k}k - \frac{1}{k}(k-1) \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx \Leftrightarrow 1 - 1 + \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$$

Conclusion :

$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ **tel que** $\boldsymbol{k \geqslant 2}$ **,** $\boldsymbol{\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}dx}$

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\boldsymbol{u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, rappelons que l'on a admis :

$$u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

Or, d'après **a.** :

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_{1}^{2} \frac{1}{x}dx$$
$$\frac{1}{3} \leqslant \int_{2}^{3} \frac{1}{x}dx$$
$$\ldots$$
$$\frac{1}{n-1} \leqslant \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}dx$$

En sommant toutes ces inégalités, on obtient :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \leqslant \int_{1}^{2} \frac{1}{x}dx + \int_{2}^{3} \frac{1}{x}dx + \cdots + \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}dx$$

puis en utilisant la relation de Chasles sur les intégrales :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \leqslant \int_{1}^{n-1} \frac{1}{x}\,dx$$

puis en ajoutant 1 à chaque membre :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \leqslant 1 + \int_{1}^{n-1} \frac{1}{x}\,dx$$
$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \leqslant 1 + [\ln(x)]_1^{n-1}$$
$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1) - \ln(1)$$
$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1) - 0$$
$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$$

Or, on a demandé d'admettre que, pour $n \geqslant 2$:

$$u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

donc :

$$u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1)$$

d'où : $u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

Conclusion : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ **tel que** $\boldsymbol{n \geqslant 2 : u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)}$

7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que :

$$\boldsymbol{\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)}$$

Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

Pour $n \geqslant 2$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(2) > 0$ donc en divisant par $\ln(n) > 0$ la relation d'ordre rappelée, on obtient :

$$\frac{\ln(n)}{\ln(n)} \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1 + \ln(n-1)}{n}$$
$$\Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{\ln(n-1)}{n}$$
$$\Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{\ln(n-1)}{n-1} \times \frac{n-1}{n}$$
$$\Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{\ln(n-1)}{n-1} \times (1 - \frac{1}{n})$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n-1)}{n-1} = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{\ln(N)}{N} = 0$ (*croissances comparées*)

donc par limite d'un produit et d'une somme :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{\ln(n-1)}{n-1} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = 1$$

On a :

$$\begin{cases} \forall n \geqslant 2, 1 \leqslant \dfrac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln(n-1)}{n} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln(n-1)}{n}\right) = 1 \end{cases}$$

donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1}$$

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

<u>Ex 03</u> [d'après Antilles-Guyane sept 2015] 6 points**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^2e^{-2nx}$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal.
On donne en annexe les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

Partie A Étude de la fonction f_1

1. **La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x^2e^{-2x}$.**
   On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. **Déterminer les limites de f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.**
   b. **Justifier que pour tout réel x, on a : $f'_1(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.**
   Dresser le tableau de variation de f_1.

2. **On admettra qu'une primitive F_1 de f_1 sur $\mathbb{R}$ est donnée par :**

$$F_1(x) = -e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

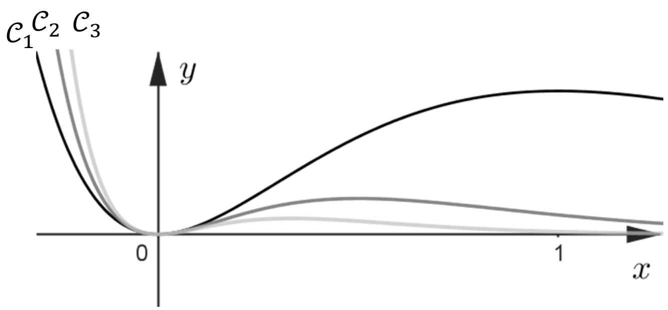
   Calculer I_1.

Partie B Étude de la suite (I_n)

1. a. **Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0;1]$, on a : $f_{n+1}(x) = e^{-2x}f_n(x)$.**
   b. **En déduire que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x appartenant à $[0;1]$, on a : $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.**
   c. **Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).**

2. a. **Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à [0; 1], on a : $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}$.**
   b. **En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.**

<u>ANNEXE</u>



<u>Corrigé</u>

$n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^2e^{-2nx}$, $\quad I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

Partie A Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x^2e^{-2x}$, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. • **limite de f_1 en $-\infty$**
   On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ $(cours)$
   d'autre part : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ $(cours)$ donc, par limite d'un produit :
   $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-2x} = +\infty$. <u>Conclusion</u> : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty}$.
   • **limite de f_1 en $+\infty$**
   $\forall x \neq 0, f_1(x) = x^2e^{-2x} = \dfrac{x^2}{e^{2x}} = \dfrac{x^2}{(e^x)^2} = \dfrac{1}{\frac{(e^x)^2}{x^2}} = \dfrac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)^2}$
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $(croissances\ comparées)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2 = +\infty$,
   puis par limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)^2} = 0$
   <u>Conclusion</u> : $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
   b. • **Justifier que pour tout réel x, on a : $f'_1(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.**
   $f_1(x) = x^2e^{-2x}$
   Rappel : $(uv)' = u' \times v + v' \times u$ et $(e^u)' = u'e^u$
   $f_1'(x) = 2x \times e^{-2x} + (-2)e^{-2x} \times x^2$
   $f_1'(x) = e^{-2x}(2x - 2x^2)$
   $f_1'(x) = e^{-2x}(2x \times 1 - 2x \times x)$
   $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$
   <u>Conclusion</u> : $\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f'_1(x) = 2xe^{-2x}(1-x)}$.

   • **tableau de variation de f_1**
   Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$ et $2 > 0$
   D'autre part, $1 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Sens de variation de f_1	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{e^2}$	↘	0

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication <u>obligatoire</u> de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »

$f_1(0) = 0^2 e^{-2(0)} = 0$ et $f_1(1) = 1^2 e^{-2(1)} = 1e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

2. **On admettra qu'une primitive F_1 de f_1 sur $\mathbb{R}$ est donnée par :**
$F_1(x) = -e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$, calculer I_1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ donc : $I_1 = \int_0^1 f_1(x)dx$.
Comme f_1 est continue sur $[0\,;1]$, on a : $I_1 = [F_1(x)]_0^1 = F_1(1) - F_1(0)$,
Or :

$F_1(1) = -e^{-2(1)}\left(\frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -e^{-2} \times \frac{5}{4}$

$F_1(0) = -e^{-2(0)}\left(\frac{0^2}{2} + \frac{0}{2} + \frac{1}{4}\right) = -1 \times \frac{1}{4}$

donc : $I_1 = -\frac{5e^{-2}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1 - 5e^{-2}}{4}$

Conclusion : $\boldsymbol{I_1 = \frac{1-5e^{-2}}{4}}$.

Partie B Étude de la suite (I_n)

1. a. **Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in [0; 1]$, on a : $f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x)$.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_{n+1}(x) = x^2 e^{-2(n+1)x} = x^2 e^{-2nx-2x} = x^2 e^{-2nx+(-2x)}$$
$$= x^2 e^{-2nx} \times e^{-2x} = f_n(x) \times e^{-2x} = e^{-2x} f_n(x)$$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;1], f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x)}$.

b. **En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1]$: $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.**

Pour tout $x \in [0\,;1]$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, donc en multipliant par $(-2) < 0$:
$0 \geqslant -2x \geqslant -2$ autrement dit : $-2 \leqslant -2x \leqslant 0$, puis :

$$e^{-2} \leqslant e^{-2x} \leqslant e^0 \Leftrightarrow e^{-2} \leqslant e^{-2x} \leqslant 1$$

En multipliant chaque membre par $f_n(x) = x^2 e^{-2nx} \geqslant 0$:

$$e^{-2} \times f_n(x) \leqslant e^{-2x} \times f_n(x) \leqslant 1 \times f_n(x)$$

Or, $e^{-2x} f_n(x) = f_{n+1}(x)$ (question **a.**) donc :

$$e^{-2} f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$$

d'où : $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.
Conclusion : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;1], f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)}$.

c. **Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a montré en **b.** que : $\forall x \in [0\,;1], f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$
donc en intégrant dans l'ordre croissant des bornes :

$$\int_0^1 f_{n+1}(x)dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)dx$$

c'est-à-dire : $I_{n+1} \leqslant I_n$.
Résumons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} \leqslant I_n$ donc la suite (I_n) **est décroissante**.

2. a. **Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;1]$, on a : $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}$.**

Rappelons que : $\forall x \in [0\,;1], f_n(x) = x^2 e^{-2nx}$.
Pour tout $x \in [0\,;1]$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, et comme la fonction carré est croissante sur $[0; + +\infty[$ donc en particulier sur $[0\,;1]$, on en déduit : $0^2 \leqslant x^2 \leqslant 1^2$, c'est-à-dire : $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, puis en multipliant par $e^{-2nx} \geqslant 0$: $0 \times e^{-2nx} \leqslant x^2 e^{-2nx} \leqslant e^{-2nx}$, i.e. : $0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}$.
Conclusion : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0\,;1], 0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}}$.

b. **En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a montré en **a.** que : $\forall x \in [0; 1], 0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}$.
En intégrant dans l'ordre croissant des bornes, on obtient :

$$\int_0^1 0dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)dx \leqslant \int_0^1 e^{-2nx}dx \Leftrightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{1}{-2n} e^{-2nx}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant -\frac{1}{2n} e^{-2n(1)} + \frac{1}{2n} e^{-2n(0)} \Leftrightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} e^{-2n}$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} (-2n) = -\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} e^{-2n} = \lim_{N \to +\infty} e^N = 0$ (*cours*)
et comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$, par la limite d'un produit et d'une somme on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} e^{-2n}\right) = 0$$

Résumons :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} e^{-2n} \\ \lim_{n \to +\infty} 0 = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} e^{-2n}\right) = 0 \end{cases}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes : $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$.

utilisation commerciale strictement interdite – copie partielle autorisée avec indication obligatoire de la source : « mathsenclair.com – Thiaude P. »