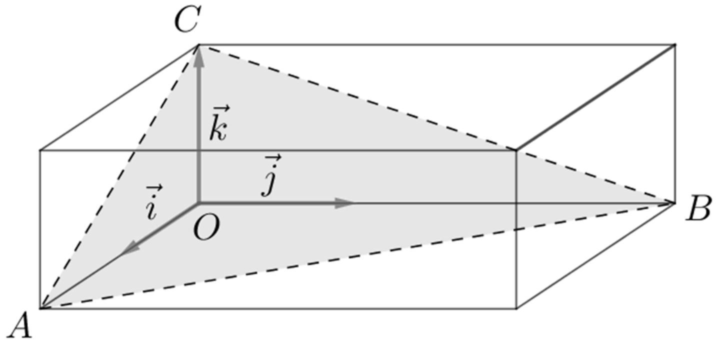
Exercice Géométrie dans l'espace (orthogonalité) **Thiaude P.**

<u>Exercice 1</u> [d'après sujet bac 15 Mars 2021 sujet 2 – 4 pts]

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère : $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;3;0)$ et $C(0;0;1)$.

L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.



1. **a.** Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x+2y+6z-6\ =\ 0$.

2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

   b. Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\ ;\frac{12}{49}\ ;\frac{36}{49}\right)$.

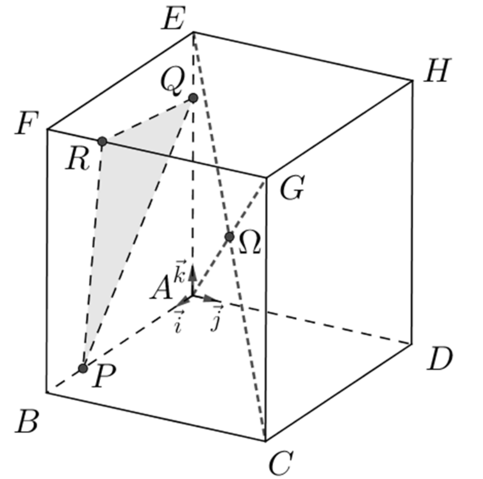
   c. Calculer la distance OH.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :
$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times h$$
où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide correspondant à cette base. En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide $OABC$, déterminer l'aire du triangle ABC.

Rép : OH =6/7 $\quad$ $\boldsymbol{\mathcal{V}=1}$ $\quad$ $\boldsymbol{\mathcal{A}_{ABC}=7/2}$

<u>Exercice</u> 2 [d'après Asie 7 Juin 2021 sujet 1 – 5 pts]

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 8 cm, de centre Ω, P, Q, R sont définis par $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$. On se place dans le repère orthonormé $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ avec $\vec{\imath}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}, \vec{\jmath}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. On admet que $R(8;2;8)$. Donner les coordonnées de P et Q.
2. Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation de (PQR) est $\ x-5y+z-6\ =\ 0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal de Ω sur le plan (PQR).

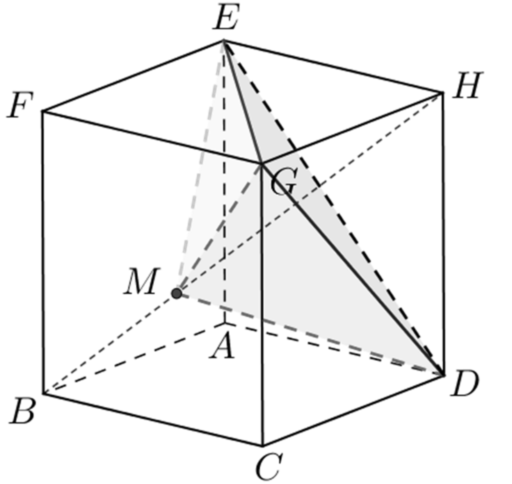
1. Justifier que $\Omega(4;4;4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que $L\left(\frac{14}{3};\frac{2}{3};\frac{14}{3}\right)$.
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

Rép :$\boldsymbol{P(6;0;0), Q(0;0;6), \Omega L=2\sqrt{3}}$

Exercice 3 [d'après Polynésie 2 Juin 2021, S2– 5 pts]

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête de longueur 1, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

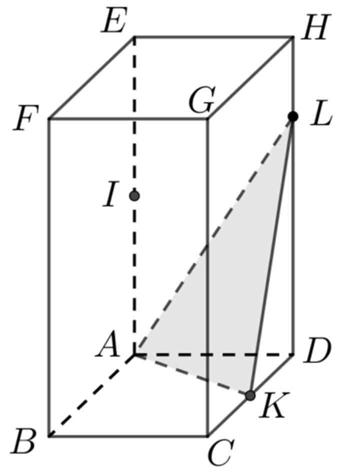


1. Donner sans justifications les coordonnées de B, D, E, G et H.
2. **a.** Déterminer la nature du triangle EGD.
   b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Montrer que l'aire du triangle EGD est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
4. **a.** Justifier que $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (EGD).
   b. En déduire une équation du plan (EGD).
   c. Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par M. Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.
5. **a.** Soit K le pied de la hauteur de la pyramide $GEDM$ issue de M. Démontrer que les coordonnées de K sont $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
   b. En déduire le volume de la pyramide $GEDM$.

Rép : $\boldsymbol{MK = \sqrt{3}\,/\,3}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\mathcal{V} = 1/6}$

Exercice 4 [d'après Asie 7 Juin 2021 sujet 2 – 5 pts]

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$, I est le milieu de $[AE]$, K est le milieu de $[DC]$, le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$, N (non représenté sur la figure) est le projeté orthogonal de D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI})$ et on admet $L\ (0; 1; \frac{3}{2})$.

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
2. **a.** Démontrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\-3\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (AKL).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
   c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
   d. En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49}; \frac{40}{49}; \frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :

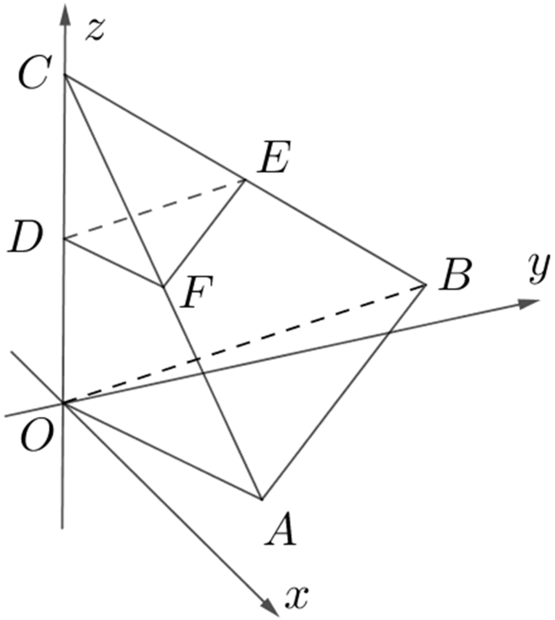
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \textit{aire de la base} \times \textit{hauteur}$$

3. **a.** Calculer le volume du tétraèdre $ADKL$ en utilisant le triangle ADK comme base.
   b. Calculer la distance du point D au plan (AKL).
   c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Rép : $\boldsymbol{DN = \sqrt{3}\,/\,7}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\mathcal{V} = 1/8}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\mathcal{A}_{AKL} = 7/\,8}$

Exercice 5 [d'après Antilles Guyane 10 Sept 2019 [5 pts]

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère les points $A(10;\ 0;\ 1)$, $B(1;\ 7;\ 1)$ et $C(0;\ 0;\ 5)$.



1. **a.** Démontrer que (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.
   b. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ arrondie à 0,1°.
2. Vérifier que $7x + 9y - 70z = 0$ est une équation de (OAB).
3. Déterminer une représentation paramétrique de (CA).
4. On note D le milieu du segment $[OC]$. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ parallèle à (OAB) et passant par D.
5. Le plan $\mathcal{P}$ coupe (CB) en E et (CA) en F. Déterminer les coordonnées de F. On admet que $E(\frac{1}{2};\frac{7}{2};3)$.
6. Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (AB).

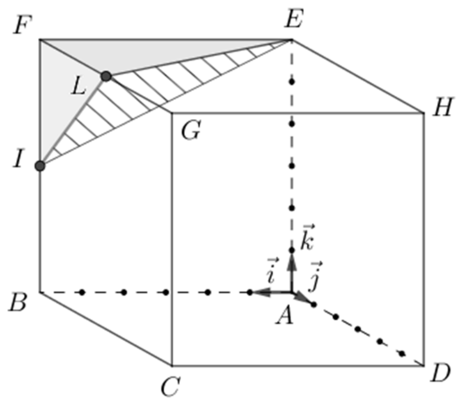
Rép : $\boldsymbol{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} \neq 0, \widehat{AOB} \approx 81{,}2°,\ 7x_A + 9y_A - 70z_A = \dots = 0}$ **idem pour O et B,**
$\boldsymbol{\mathcal{P}: 7x + 9y - 70z + 175 = 0, F(5;0;3), -2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}}$

Exercice 6 [d'après Polynésie 4 Sept 2019 [5 pts]

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 6 cm, on se place dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$.
On donne $I\ (6;\ 0;\ 3)$, on note L le milieu du segment $[FG]$ et on note $\mathcal{P}$ le plan défini par les trois points E, I et L.

1. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
   b. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2. Justifier que le volume du tétraèdre $FELI$ est 9 cm^3.
3. **a.** Justifier que la perpendiculaire Δ à $\mathcal{P}$ passant par F admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t + 6 \\ y = -2t \\ z = 2t + 6 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
   b. Montrer que l'intersection de Δ et $\mathcal{P}$ est $K(\frac{16}{3};\frac{4}{3};\frac{14}{3})$.
4. Calculer l'aire en cm^2 du triangle ELI.
5. Tracer sur le graphique fourni en annexe la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan parallèle à $\mathcal{P}$ passant par G et en donner la nature précise sans justification.

ANNEXE à rendre avec la copie



Rép :
$\boldsymbol{\vec{n}\cdot\overrightarrow{EI} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{EL} = 0}$
$\boldsymbol{\mathcal{P}: x - 2y + 2z - 12 = 0, \mathcal{A}_{ELI} = \frac{27}{2}}$
$\boldsymbol{BNMG}$ **trapèze de bases $[BG]$ et $[NM]$**