Préparation bac : équations différentielles

Ex 01*

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -2y - 8$ où y représente une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

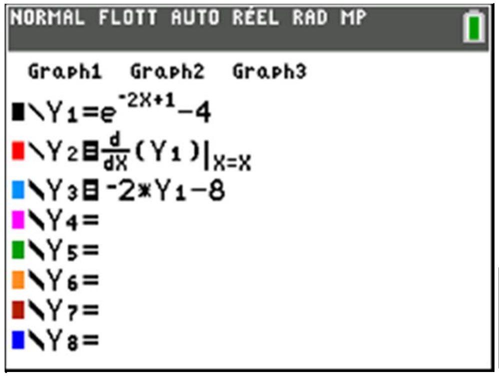
1. **Donner la solution générale de (E).**
2. **En déduire la solution f de (E) telle que : $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$.**

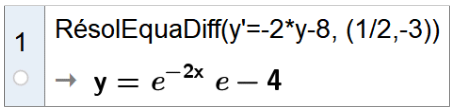
Corrigé

$(E) : y' = -2y - 8$

1. $y' = -2y - 8$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -2$ et $b = -8$,
   dont la solution générale pour $a \neq 0$ est $y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.
   Donc la solution générale de (E) est : $y = Ce^{-2x} - \frac{-8}{-2} = Ce^{-2x} - 4$.
   La solution générale de (E) est la fonction y telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{y(x) = Ce^{-2x} - 4}$$
   où C est une constante réelle.

2. **En déduire la solution f sur $\mathbb{R}$ de (E) telle que $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$.**
   f est une solution de (E) donc il existe une constante réelle C telle que,
   pour tout réel x : $f(x) = Ce^{-2x} - 4$.
   Or, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$ donc :
   $$Ce^{-2\left(\frac{1}{2}\right)} - 4 = -3 \Leftrightarrow Ce^{-1} = -3 + 4 \Leftrightarrow Ce^{-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{C}{e} = 1 \Leftrightarrow C = e$$
   On a donc : $f(x) = e \times e^{-2x} - 4 = e^1 \times e^{-2x} - 4 = e^{-2x+1} - 4$.
   Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x) = e^{-2x+1} - 4}$.





Les courbes se superposent bien.

Ex 02*

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = 3x + 2$ où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

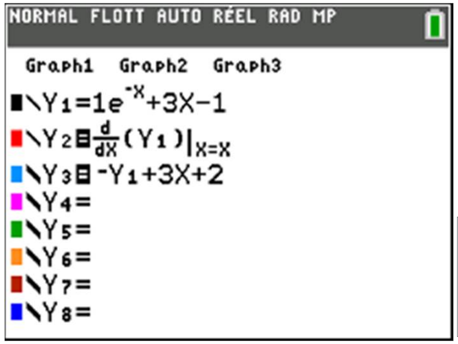
1. **Chercher une fonction affine solution particulière de (E).**
2. **Donner la solution générale de (E_0) : $y' + y = 0$.**
3. **Déduire des questions précédentes la solution générale de (E).**

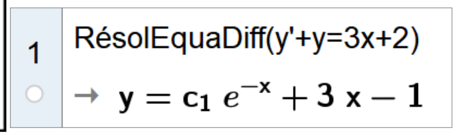
Corrigé

1. Soient a et b deux réels et f_0 la fonction affine $x \mapsto ax + b$.
   Pour tout réel x : $f_0{}'(x) = a$. On a les équivalences :
   f_0 est une solution de $(E) \Leftrightarrow f_0' + f_0 = 3x + 2 \Leftrightarrow a + ax + b = 3x + 2$
   $\Leftrightarrow ax + a + b = 3x + 2$.
   Par identification : $\begin{cases} a = 3 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ 3 + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$.
   Une solution particulière de (E) est la fonction f_0 telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f_0(x) = 3x - 1}$$
   où C est une constante réelle.

2. L'équation différentielle $y' + y = 0$ s'écrit aussi : $y' = -y$, qui est de la forme $y' = \alpha y$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{\alpha x}$ où C est une constante réelle, donc la solution générale de (E_0) est la fonction y telle que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{y(x) = Ce^{-x}}$$
   où C est une constante réelle.

3. On a d'après le cours :
   « la solution générale de (E)
   = une solution particulière de (E) + la solution générale de (E_0) »
   Donc la solution générale de (E) est la fonction y telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x) = Ce^{-x} + 3x - 1}$$
   où C est une constante réelle C.





Vérification pour $C = 1$: les courbes se superposent bien.

<u>Ex 03*</u>

On considère l'équation différentielle (E) : $2y' = 6y - 9$ où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$: donner la solution générale de (E).

<u>Corrigé</u>

Il faut se ramener à une forme pour laquelle le coefficient de y' est 1.

L'équation différentielle $2y' = 6y - 9$ s'écrit aussi : $y' = 3y - \frac{9}{2}$ qui est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 3$ et $b = -\frac{9}{2}$, dont la solution générale pour $a \neq 0$ s'écrit $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ donc la solution générale de (E) s'écrit $x \mapsto Ce^{3x} - \frac{-\frac{9}{2}}{3}$

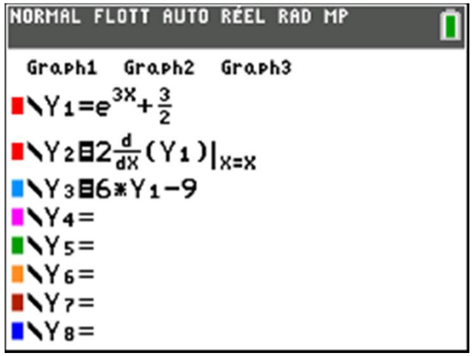
Or,

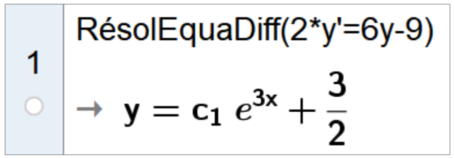
$$-\frac{-\frac{9}{2}}{3} = +\frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{9 \times 1}{2 \times 3} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{2}$$

La solution générale de (E) est la fonction y telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{y(x) = Ce^{3x} + \frac{3}{2}}$$

où C est une constante réelle.





Vérification pour $C = 1$: les courbes se superposent bien.

<u>Ex 04*</u>

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y - (x-1)^2$.

1. **Chercher une solution particulière f_0 sur $\mathbb{R}$ de (E) de la forme : $f_0(x) = x^2 + a$ où a est une constante réelle à déterminer.**
2. **En déduire la solution générale de (E).**

<u>Corrigé</u>

(E) : $y' = y - (x-1)^2$.

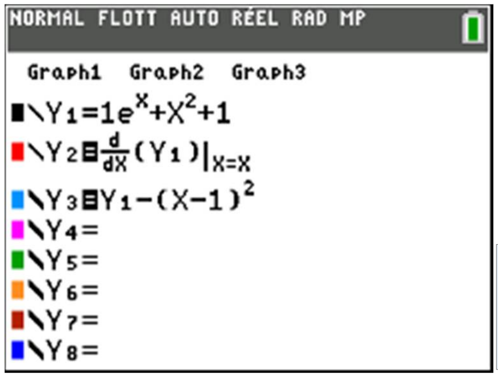
1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = x^2 + a$ et $f_0'(x) = 2x$.
   On a les équivalences :
   f_0 est une solution sur $\mathbb{R}$ de $(E) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_0'(x) = f_0(x) - (x-1)^2$
   $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2x = x^2 + a - (x^2 - 2x + 1)$
   $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2x = x^2 + a - x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2x = 2x + a - 1$
   $\Leftrightarrow 0 = a - 1 \Leftrightarrow a = 1$

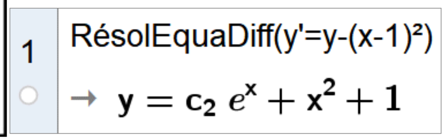
   Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f_0(x) = x^2 + 1}$

2. D'après le cours :
   « solution générale de (E)
   $=$ solution générale de (E_0) + une solution particulière de (E) »
   Or, la solution générale de (E_0) : $y' = y$ est $x \mapsto Ce^x$ et $f_0(x) = e^x + x^2 + 1$ est une solution particulière de (E) donc la solution générale de (E)est la fonction y telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{y(x) = Ce^x + x^2 + 1}$$

   où C est une constante réelle.





Vérification pour $C = 1$: les courbes se superposent bien.