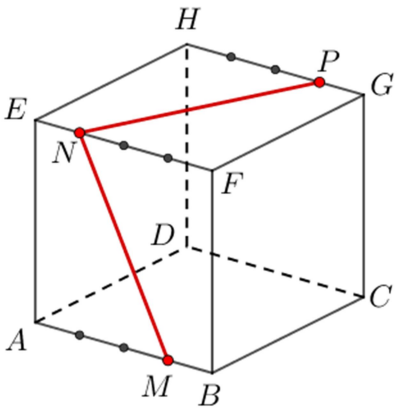
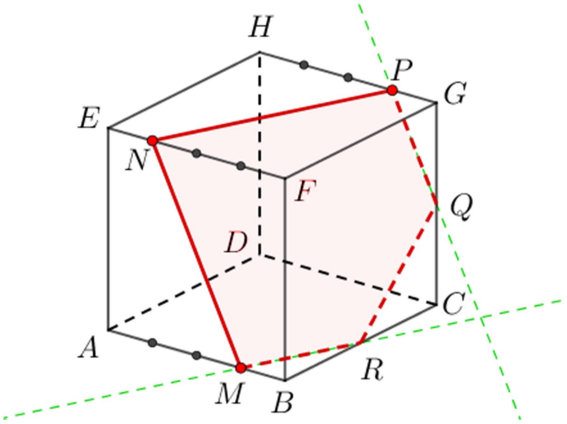
D01 **Tracer la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (MNP)**



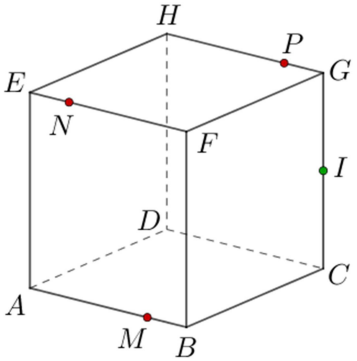
Corrigé



D02 **$ABCDEFGH$ est un cube,**
I est le milieu de $[CG]$,
M, N et P sont définis par :

$$\overrightarrow{EN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \ \ et \ \ \overrightarrow{HP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$$

1. **Exprimer $\overrightarrow{NM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$,**
   exprimer $\overrightarrow{NP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. **Exprimer $\overrightarrow{NI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.**
3. **Les points M, N, P et I sont-ils coplanaires ?**



Corrigé

1. **Exprimer $\overrightarrow{NM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$**

On a :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{NM}\\
&= \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AM} \ \ (Chasles)\\
&= -\overrightarrow{EN} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AM}\\
&= -\frac{1}{4}\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{AE} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \ (avec\ définitions\ de\ N\ et\ M)\\
&= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}}$$

Exprimer $\overrightarrow{NP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} + \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$$
$$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$$

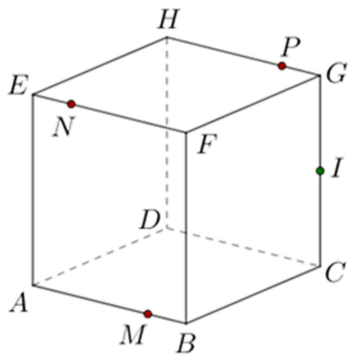
2. On a :

$$\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$$
$$= \frac{3}{4}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{NI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}}$$

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.



3. Les points M, N, P et I sont-ils coplanaires ?

On cherche s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\overrightarrow{NI} = x\overrightarrow{NM} + y\overrightarrow{NP}$

On a les équivalences :

$$\overrightarrow{NI} = x\overrightarrow{NM} + y\overrightarrow{NP}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = x\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}\right) + y\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} - x\overrightarrow{AE}$$

Comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace, cette égalité est équivalente à :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4} \\ y = 1 \\ -x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{NI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP}$$

Le vecteur $\overrightarrow{NI}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{NP}$ donc les trois vecteurs $\overrightarrow{NI}$, $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont coplanaires, par conséquent les quatre points **N, M, P et I sont coplanaires**.

On utilise souvent le cas particulier suivant du cours

Si $\vec{w}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Dans cette implication on ne regarde pas si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ou non colinéaires, c'est la réciproque qui exige que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non colinéaires.

D03 **$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace, A, E, F et G des points tels que : $\overrightarrow{AE} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{u} + 4\vec{v} - 6\vec{w}$ et $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + 5\vec{v} - 7\vec{w}$.**

Existe-t-il des réels α et β tels que : $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AF} + \beta\overrightarrow{AG}$?

Que peut-on en déduire pour la position relative des points A, E, F et G ?

Corrigé

Avec les notations de l'exercice on a les équivalences :

$$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AF} + \beta\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \alpha(\vec{u} + 4\vec{v} - 6\vec{w}) + \beta(\vec{u} + 5\vec{v} - 7\vec{w})$$
$$\Leftrightarrow -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\alpha + \beta)\vec{u} + (4\alpha + 5\beta)\vec{v} + (-6\alpha - 7\beta)\vec{w}$$

Or, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace donc l'égalité précédente est équivalente à :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 4\alpha + 5\beta = 1 \\ -6\alpha - 7\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 - \alpha \\ 4\alpha + 5(-1 - \alpha) = 1 \\ -6\alpha - 7(-1 - \alpha) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 - \alpha \\ 4\alpha - 5 - 5\alpha = 1 \\ -6\alpha + 7 + 7\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 - \alpha \\ -\alpha = 6 \\ \alpha = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = -1 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

On a donc $\overrightarrow{AE} = -6\overrightarrow{AF} + 5\overrightarrow{AG}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ donc les trois vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont coplanaires, par conséquent les quatre points **A, E, F et G sont coplanaires**.

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

D04 $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ **est une base de l'espace,** A, M, N **et** P **des points tels que :** $\overrightarrow{AM}=2\vec{u}+3\vec{v}+\vec{w}$, $\overrightarrow{AN}=5\vec{u}-\vec{v}+4\vec{w}$ **et** $\overrightarrow{AP}=-\vec{u}+7\vec{v}-2\vec{w}$.
Existe-t-il des réels α **et** β **tels que :** $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{AN}$ **? Que peut-on en déduire pour la position relative des points** A, M, N **et** P **?**

Corrigé

Dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de l'espace, on a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}-1\\7\\-2\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{AN}$ a pour coordonnées :

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha+5\beta\\3\alpha-\beta\\\alpha+4\beta\end{pmatrix}$$

On a les équivalences :

$$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{AN}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+5\beta=-1\\3\alpha-\beta=7\\\alpha+4\beta=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(-2-4\beta)+5\beta=-1\\3(-2-4\beta)-\beta=7\\\alpha=-2-4\beta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-4-8\beta+5\beta=-1\\-6-12\beta-\beta=7\\\alpha=-2-4\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\beta=3\\-13\beta=13\\\alpha=-2-4\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-1\\\beta=-1\\\alpha=-2-4(-1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\\beta=-1\end{cases}$$

On a donc : $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AP}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ donc les trois vecteurs $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont coplanaires, par conséquent les quatre points A, M, N **et** P **sont coplanaires**.

D05 Dans l'espace muni d'un repère on considère $A(1;3;5)$, $B(2;5;8)$ **et** $C(4;9;14)$ **: ces trois points sont-ils alignés ?**

Corrigé

$A(1;3;5)$, $B(2;5;8)$, $C(4;9;14)$

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\5-3\\8-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\\z_C-z_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-1\\9-3\\14-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

On a : $3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$ donc $3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$, autrement dit $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$.

Il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, et comme trois points seulement interviennent, A, B et C, on en déduit que **ces trois points sont alignés**.

D06 Dans l'espace muni d'un repère on considère les trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$ **et** $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix}$ **: ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?**

Corrigé

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls.

Or, on a :

$$\begin{vmatrix}2&3\\3&-2\end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times3=-6-9=-15\neq0$$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires par conséquent dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

$$\begin{cases}-1=\alpha(2)+\beta(3)\\5=\alpha(3)+\beta(-2)\\2=\alpha(1)+\beta(2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+3\beta=-1\\3\alpha-2\beta=5\\\alpha+2\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta=2\\2\alpha+3\beta=-1\\3\alpha-2\beta=5\end{cases}$$

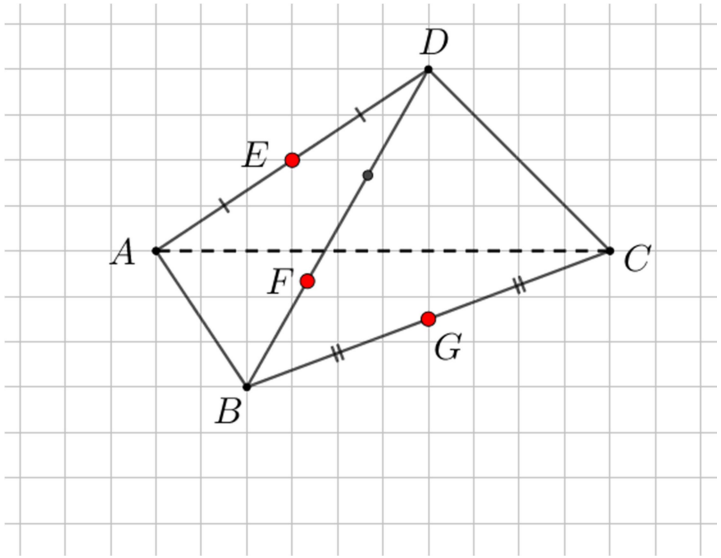
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2-2\beta\\2(2-2\beta)+3\beta=-1\\3(2-2\beta)-2\beta=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2-2\beta\\4-4\beta+3\beta=-1\\6-6\beta-2\beta=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2-2\beta\\-\beta=-5\\-8\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2-2\beta\\\beta=5\\\beta=\dfrac{1}{8}\end{cases}$$

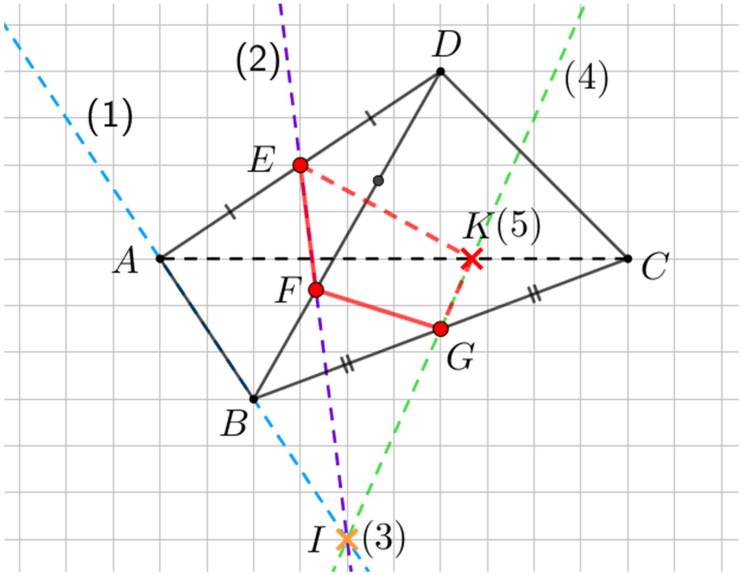
Les deux dernières lignes du système sont incompatibles donc il est impossible, par conséquent les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ **et** $\vec{w}$ **<u>ne</u> sont <u>pas</u> coplanaires**.

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

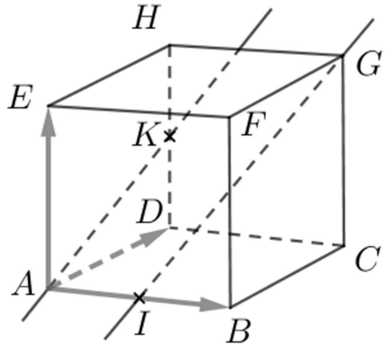
D07 $ABCD$ est un tétraèdre, E est le milieu de $[AD]$, G est le milieu de $[BC]$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$: tracer la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (EFG).



Corrigé



D08 $ABCDEFGH$ est un cube, on note I le milieu de $[AB]$, K le milieu de $[DH]$ et on munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:



- donner les coordonnées des points A, B, D, G et H puis déterminer les coordonnées des points I et K
- donner une représentation paramétrique des droites (IG) et (AK)
- (IG) et (AK) sont-elles parallèles, sécantes, non coplanaires ?

Corrigé

- A est l'origine du repère donc $\boldsymbol{A(0;0;0)}$

$\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{B(1;0;0)}$

$\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{D(0;1;0)}$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{G(1;1;1)}$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{H(0;1;1)}$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + O\overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{I\left(\frac{1}{2};0;0\right)}$

(on peut aussi utiliser la formule des coordonnées du milieu d'un segment)

K est le milieu de $[DH]$ donc :

$$x_K = \frac{x_D + x_H}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

$$y_K = \frac{y_D + y_H}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$z_K = \frac{z_D + z_H}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\boldsymbol{K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)}$

- **représentations paramétriques des droites (IG) et (AK)**

$\overrightarrow{IG}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_G - x_I \\ y_G - y_I \\ z_G - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

Une représentation paramétrique de la droite (IG) est :

$$\begin{cases} x = x_I + \frac{1}{2}t \\ y = y_I + 1t \\ z = z_I + 1t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Finalement :

$$(\boldsymbol{IG}) : \begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t} \\ \boldsymbol{y = t} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases} \quad (\boldsymbol{t} \in \mathbb{R})$$

$\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_K - x_A \\ y_K - y_A \\ z_K - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 1 - 0 \\ \frac{1}{2} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de (AK) est :

$$\begin{cases} x = x_A + 0\lambda \\ y = y_A + 1\lambda \\ z = z_A + \frac{1}{2}\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Finalement :

$$(\boldsymbol{AK}) : \begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = \lambda} \\ \boldsymbol{z = \frac{1}{2}\lambda} \end{cases} \quad (\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R})$$

• **(IG) et (AK) sont-elles parallèles, sécantes, non coplanaires ?**

Pour étudier la position relative de deux droites, on peut commencer par regarder l'existence de point(s) en commun :
— un et un seul point en commun : les deux droites sont sécantes,
— une infinité de points en commun : les deux droites sont confondues,
— aucun point en commun : on doit poursuivre en regardant si les deux droites sont parallèles strictement (un vecteur directeur de l'une et un vecteur directeur de l'autre sont colinéaires), mais si ce n'est pas le cas alors les deux droites sont non coplanaires.

La recherche de point en commun à ces deux droites amène à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t = 0 \\ t = \lambda \\ t = \frac{1}{2}\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}t = -\frac{1}{2} \\ t = \lambda \\ t = \frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \lambda \\ \frac{1}{2}t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \lambda \\ t = 0 \end{cases}$$

Les deux lignes L_1 et L_3 de ce système sont incompatibles donc les droites (IG) et (AK) <u>n'ont pas</u> de point en commun.
Les droites (IG) et (AK) sont donc soit strictement parallèles, soit non coplanaires.

Rappelons que : $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement <u>les trois</u> déterminants 2×2 extraits sont nuls.
Or, on a :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times 1 - 0 \times 1 = \frac{1}{2} \neq 0$$

donc $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{AK}$ <u>ne sont pas</u> colinéaires, par conséquent les droites (IG) et et (AK) <u>ne sont pas</u> parallèles.

<u>Conclusion</u> : (IG) et (AK) **ne sont pas coplanaires**.

Si deux droites de l'espace sont parallèles alors elles sont représentées par deux droites parallèles sur la figure en perspective cavalière mais deux droites qui sont - ou semblent - parallèles sur la figure en perspective cavalière peuvent représenter des droites de l'espace qui ne le sont pas.

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

D09 **Dans l'espace muni d'un repère on donne :**

$A(1;2;5)$ **et** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$**, on note** $\mathcal{D}$ **la droite passant par** A **et de vecteur directeur** $\vec{u}$ **et on note** $\mathcal{P}$ **le plan d'équation** $2x+3y+z=4$**.**
On admet que $\mathcal{D}$ **et** $\mathcal{P}$ **ne sont pas parallèles et on note** I **leur point d'intersection : donner une représentation paramétrique de** $\mathcal{D}$ **puis déterminer les coordonnées de** I**.**

Corrigé

La droite $\mathcal{D}$ passe par $A(1;2;5)$ et admet $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur

donc elle admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=5+t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$.

Le point I appartient à $\mathcal{D}$ donc il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}x_I=1+2t\\y_I=2-t\\z_I=5+t\end{cases}\quad(*)$.

d'autre part, I appartient au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+3y+z=4$ donc ses coordonnées vérifient cette équation : $2x_I+3y_I+z_I=4$.
En tenant compte de $(*)$ on obtient :

$$2(1+2t)+3(2-t)+5+t=4 \Leftrightarrow 2+4t+6-3t+5+t=4$$
$$\Leftrightarrow 2t+13=4 \Leftrightarrow 2t=-9 \Leftrightarrow t=-\frac{9}{2}$$

En remplaçant dans $(*)$:

$$x_I=1+2\left(-\frac{9}{2}\right)=1-9=-8$$
$$y_I=2-\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{4}{2}+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$$
$$z_I=5+\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{10}{2}-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{I\left(-8;\frac{13}{2};\frac{1}{2}\right)}$$

D10 **Dans une base de l'espace on donne :**

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\text{ et }\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{19}{6}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

- **les deux vecteurs** $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont-ils colinéaires ?**
- **les trois vecteurs** $\vec{u}$**,** $\vec{v}$ **et** $\vec{w}$ **sont-ils coplanaires ?**

Corrigé

- **les deux vecteurs** $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont-ils colinéaires ?**

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement <u>les trois</u> déterminants 2×2 extraits sont nuls.
Or, on a :

$$\begin{vmatrix}2&1\\5&2\end{vmatrix}=2\times 2-1\times 5=4-5=-1\neq 0$$

donc $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **<u>ne sont pas</u> colinéaires**.

<u>Autre méthode</u> :
$\vec{u}\neq\vec{0}$ donc dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{v}=k\vec{u}$, c'est-à-dire tel que :

$$\begin{cases}1=2k\\2=5k\\3=3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\k=\frac{2}{5}\\k=1\end{cases}$$

Ce système contient des équations incompatibles donc il n'existe pas k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$, par conséquent $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **<u>ne sont pas</u> colinéaires**

- **les vecteurs** $\vec{u}$**,** $\vec{v}$ **et** $\vec{w}$ **sont-ils coplanaires ?**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ revient à dire qu'il existe deux réels α et β tels que : $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

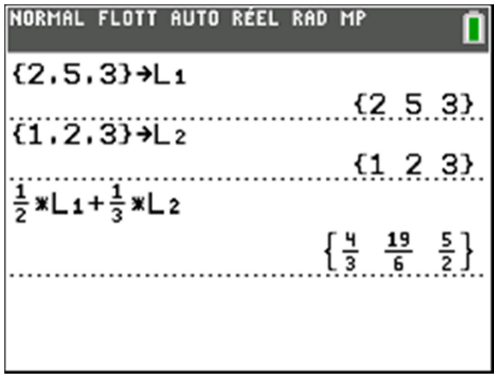
utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=\frac{4}{3} \\ 5\alpha+2\beta=\frac{19}{6} \\ 3\alpha+3\beta=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha+\frac{4}{3} \\ 5\alpha+2\left(-2\alpha+\frac{4}{3}\right)=\frac{19}{6} \\ 3\alpha+3\left(-2\alpha+\frac{4}{3}\right)=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha+\frac{4}{3} \\ \alpha+\frac{8}{3}=\frac{19}{6} \\ -3\alpha+4=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha+\frac{4}{3} \\ \alpha=\frac{19}{6}-\frac{16}{6} \\ -3\alpha=\frac{5}{2}-\frac{8}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha+\frac{4}{3} \\ \alpha=\frac{1}{2} \\ -3\alpha=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha+\frac{4}{3} \\ \alpha=\frac{1}{2} \\ \alpha=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{2} \\ \beta=-2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{2} \\ \beta=\frac{1}{3} \end{cases}$$

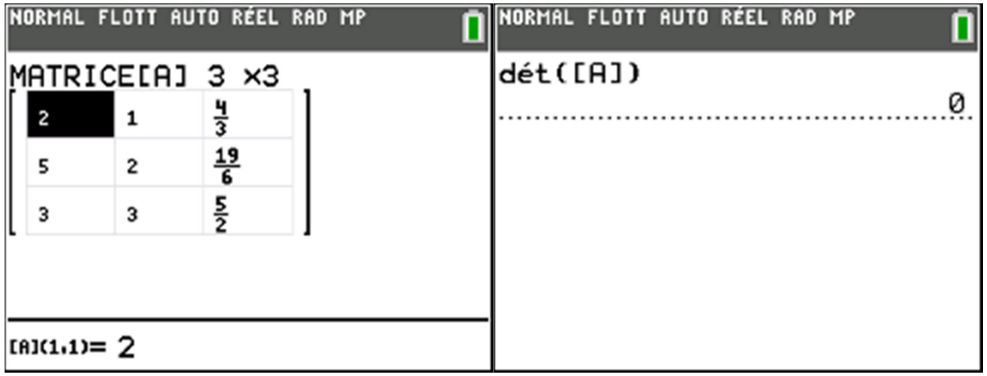
Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ (à savoir $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{1}{3}$) par conséquent les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ **sont coplanaires**.



On a bien :

$$\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}=\vec{w}$$

On peut aussi faire calculer le déterminant 3×3 de la matrice des coordonnées et constater qu'il est nul.

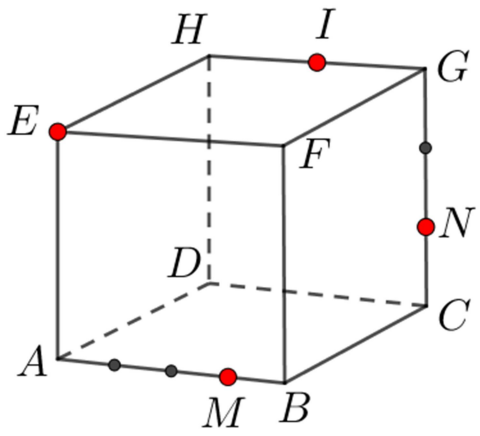


D11 **[Recherche]**

***ABCDEFGH* un cube, *I* est le milieu de [*GH*], *M* et *N* sont définis par :**

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$$

***M*, *N*, *I* et *E* sont-ils coplanaires ?**



Corrigé

On a d'une part :

$$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AM}\ (Chasles)=-\overrightarrow{AE}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\ \ (définition\ de\ M)$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{IN} \\ &=\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CN}\ (Chasles) \\ &=\frac{1}{2}\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CG}\ \ (définitions\ de\ I\ et\ N) \\ &=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\ (ABCDEFGH\ est\ un\ cube) \\ &=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \\ &=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

Résumons :

$$\overrightarrow{EM} = -\overrightarrow{AE} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \ \ et \ \ \overrightarrow{IN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

On a :

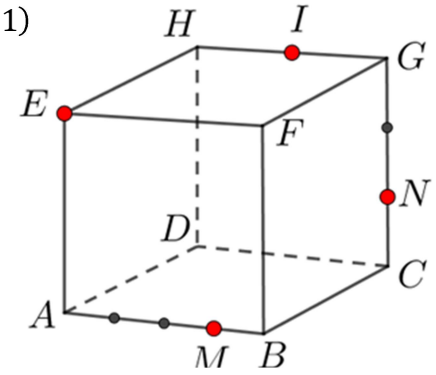
$$\frac{2}{3}\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AE} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IN}$$

On a : $\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IN}$ donc $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{IN}$ sont colinéaires, par conséquent les droites (EM) et (IN) sont parallèles, on en déduit qu'elles sont coplanaires, donc les points : $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{I}$ **et** $\boldsymbol{E}$ **sont coplanaires.**

<u>Autre méthode</u>

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a :

$M\left(\frac{3}{4}; 0; 0\right), N\left(1; 1; \frac{1}{3}\right), I\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right) E(0; 0; 1)$



Alors :

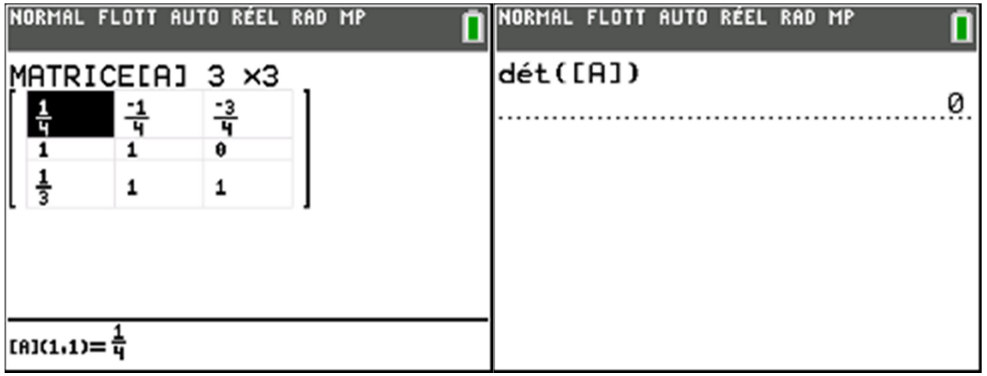
$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 1-\frac{3}{4} \\ 1-0 \\ \frac{1}{3}-0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{3}{4} \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{MI}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{ME}\begin{pmatrix} 0-\frac{3}{4} \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{ME}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Résumons</u> :

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \overrightarrow{MI}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{ME}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



D'après la calculatrice, les trois vecteurs sont coplanaires…

Les deux vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MI}$ sont colinéaires si et seulement <u>les trois</u> déterminants 2×2 extraits sont nuls. Or, on a :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \times 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) \times 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MI}$ ne sont pas colinéaires, donc dire que $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{ME}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe α et β tels que $\overrightarrow{ME} = \alpha\overrightarrow{MN} + \beta\overrightarrow{MI}$:

$$\begin{cases} -\frac{3}{4} = \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}\beta \\ 0 = \alpha + \beta \\ 1 = \frac{1}{3}\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -3 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \frac{1}{3}\alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 3 \\ \beta - 3 + \beta = 0 \\ \frac{1}{3}(\beta - 3) + \beta = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 3 \\ 2\beta = 3 \\ \frac{4}{3}\beta - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 3 \\ \beta = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3}\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 3 \\ \beta = \frac{3}{2} \\ \beta = \frac{6}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 3 \\ \beta = \frac{3}{2} \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2} - 3 \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{2} \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{ME} = \alpha\overrightarrow{MN} + \beta\overrightarrow{MI}$ (à savoir $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$) donc les trois vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{ME}$ sont coplanaires par conséquent les quatre points M, N, I et E sont coplanaires.

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

D12 **Dans l'espace muni d'un repère, on considère :**

$$\boldsymbol{A(1;1:5),\ B(5;-3;11),\ C(0;4;1)\ \text{et}\ D(2;6;-1)}$$

Déterminer si les droites (AB) et (CD) sont sécantes ou non.
Dans l'affirmative, calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

Corrigé

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ -3-1 \\ 11-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Comme $A(1\,;1\,;5)$ on en déduit qu'une représenttaion paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 1-4t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5+6t \end{cases}$$

$\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2-0 \\ 6-4 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C(0\,;4\,;1)$ donc une représenttaion paramétrique de (CD) est :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 4+2\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = 1-2\lambda \end{cases}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles, donc elles sont soit sécantes (elle ont alors un seul point en commun) soit elles sont non coplanaires (elle n'ont alors aucun point en commun).

La recherche de point commun amène à résoudre le système :

$$\begin{cases} 1+4t = 2\lambda \\ 1-4t = 4+2\lambda \\ 5+6t = 1-2\lambda \end{cases}$$

On a les équivalences :

$$\begin{cases} 1+4t = 2\lambda \\ 1-4t = 4+2\lambda \\ 5+6t = 1-2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4t = 2\lambda \\ 1-4t = 4+1+4t \\ 5+6t = 1-(1+4t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4t = 2\lambda \\ -4 = 8t \\ 5+6t = 1-1-4t \end{cases} -$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+4t = 2\lambda \\ -\frac{1}{2} = t \\ 10t = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4t = 2\lambda \\ t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ 1+4\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Faisons $t = -\frac{1}{2}$ dans la représentationparamétrique de (AB) précédente, on obtient :

$$x = 1+4t = 1+4\left(-\frac{1}{2}\right) = 1-2 = -1$$
$$y = 1-4t = 1-4\left(-\frac{1}{2}\right) = 1+2 = 3$$
$$z = 5+6t = 5+6\left(-\frac{1}{2}\right) = 5-3 = 2$$

Les droites $(\boldsymbol{AB})$ **et** $(\boldsymbol{CD})$ **sont sécantes en** $\boldsymbol{I(-1;3;2)}$**.**

En faisant $\lambda = -\frac{1}{2}$ dans $(**)$ il faut retrouver les coordonnées de I :

$$x = 2\lambda = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$
$$y = 4+2\lambda = 4+2\left(-\frac{1}{2}\right) = 4-1 = 3$$
$$z = 1-2\lambda = 1-2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1+1 = 2$$

On retrouve bien les coordonnées de I.

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

D13 **Dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on note $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :**

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = 11 + 5t \end{cases}$$

- **sans calculs donner un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$**
- **$B(13;9;36)$ appartient-il à $\mathcal{D}$?**
- **$C(-1;2;3)$ appartient-il à $\mathcal{D}$?**
- **$\mathcal{D}$ coupe le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ en E : déterminer les coordonnées de E**

Corrigé

- $A(3;4;11)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$

- B appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x_B = 3 + 2t \\ y_B = 4 + t \\ z_B = 11 + 5t \end{cases}$$

On a les équivalences :

$$\begin{cases} 13 = 3 + 2t \\ 9 = 4 + t \\ 36 = 11 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = 2t \\ 5 = t \\ 25 = 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 5 \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow t = 5$$

Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de B vérifient toutes les équations de la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ donc **B appartient à $\mathcal{D}$**.

- C appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x_C = 3 + 2t \\ y_C = 4 + t \\ z_C = 11 + 5t \end{cases}$$

On a les équivalences :

$$\begin{cases} -1 = 3 + 2t \\ 2 = 4 + t \\ 3 = 11 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 2t \\ -2 = t \\ -8 = 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -\dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Ce système contient deux équations incompatibles, par exemple L_1 et L_3 donc il est impossible, par conséquent Il n'existe pas $t \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de C vérifient les équations de la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ donc **C n'appartient pas à $\mathcal{D}$**.

- $\mathcal{D}$ coupe le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ en E : déterminer les coordonnées de E

$E \in \mathcal{D}$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x_E = 3 + 2t \\ y_E = 4 + t \\ z_E = 11 + 5t \end{cases}$$

Or, $E \in (0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ revient à dire $z_E = 0$.
Le système précédent s'écrit donc :

$$\begin{cases} x_E = 3 + 2t \\ y_E = 4 + t \\ 0 = 11 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 3 + 2\left(-\dfrac{11}{5}\right) \\ y_E = 4 - \dfrac{11}{5} \\ t = -\dfrac{11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \dfrac{15}{5} - \dfrac{22}{5} \\ y_E = \dfrac{20}{5} - \dfrac{11}{5} \\ t = -\dfrac{11}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -\dfrac{7}{5} \\ y_E = \dfrac{9}{5} \\ t = -\dfrac{11}{5} \end{cases}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{E\left(-\frac{7}{5};\frac{9}{5};0\right)}$$

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

D14 **Dans l'espace muni d'un repère on considère les plans :**

$$\boldsymbol{\mathcal{P} : x + 2y + z = 5}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{Q} : 3x - y + z = 4}$$

On admet que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles et on note $\mathcal{D}$ leur droite d'intersection.
On note A le point de $\mathcal{D}$ tel que $z_A = 2$: déterminer x_A et y_A
On note B lepoint de $\mathcal{D}$ tel que $z_B = -5$: déterminer x_B et y_B
Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Corrigé

• $A \in \mathcal{P}$ donc $x_A + 2y_A + z_A = 5$, or $z_A = 2$, donc $x_A + 2y_A + 2 = 5$
autrement dit : $x_A + 2y_A = 3$
$A \in \mathcal{Q}$ donc $3x_A - y_A + z_A = 4$, or $z_A = 2$ donc $3x_A - y_A + 2 = 4$
autrement dit : $3x_A - y_A = 2$
Le couple (x_A, y_A) est donc solution du système : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$

On a les équivalences :

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 3(3 - 2y) - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 9 - 6y - y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ -7y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2(1) \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

On a donc : $\boldsymbol{x_A = y_A = 1}$, finalement : $A(1; 1; 2)$.

• $B \in \mathcal{P}$ donc $x_B + 2y_B + z_B = 5$, or $z_B = -5$, donc $x_B + 2y_B - 5 = 5$
autrement dit : $x_B + 2y_B = 10$
$B \in \mathcal{Q}$ donc $3x_B - y_B + z_B = 4$, or $z_B = -5$ donc $3x_B - y_B - 5 = 4$
autrement dit : $3x_B - y_B = 9$
Le couple (x_A, y_A) est donc solution du système : $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 2y \\ 3(10 - 2y) - y = 9 \end{cases} \begin{cases} x = 10 - 2y \\ 30 - 6y - y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 2y \\ -7y = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 2(3) \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

On a donc : $\boldsymbol{x_B = 4}$ et $\boldsymbol{y_B = 3}$, finalement : $B(4; 3; -5)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 3 - 1 \\ -5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

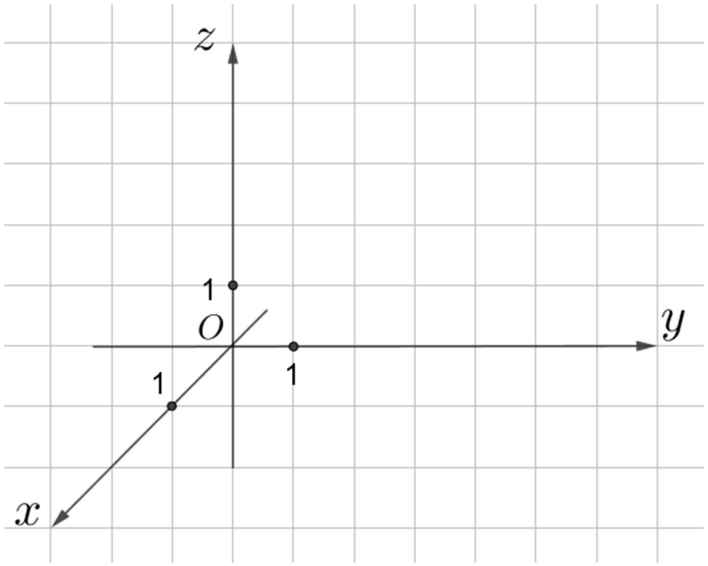
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) et $A(1; 1; 2)$ appartient à (AB) donc une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + 3t} \\ \boldsymbol{y = 1 + 2t} \\ \boldsymbol{z = 2 - 7t} \end{cases} \quad (\boldsymbol{t} \in \mathbb{R})$$

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

D15 **Dans l'espace muni d'un repère orthogonal on note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 2y + 2z = 6$.**

- **$\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en A : déterminer les coordonnées de A**
- **$\mathcal{P}$ coupe l'axe des ordonnées en B : déterminer les coordonnées de B**
- **$\mathcal{P}$ coupe l'axe des cotes en C : déterminer les coordonnées de C**
- **déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC**
- **sur la figure ci-après représenter le triangle ABC puis placer le point G**



Corrigé

- $A \in \mathcal{P}$: $3x + 2y + 2z = 6$ donc $3x_A + 2y_A + 2z_A = 6$, or $A \in (Ox)$ donc $y_A = z_A = 0$ puis $3x_A = 6 \Leftrightarrow x_A = 2$; finalement : $\boldsymbol{A(2;0;0)}$.
- $B \in \mathcal{P}$: $3x + 2y + 2z = 6$ donc $3x_B + 2y_B + 2z_B = 6$, or $B \in (Oy)$ donc $x_B = z_B = 0$ puis $2x_B = 6 \Leftrightarrow x_B = 3$; finalement : $\boldsymbol{B(0;3;0)}$.
- $C \in \mathcal{P}$: $3x + 2y + 2z = 6$ donc $3x_C + 2y_C + 2z_C = 6$, or $C \in (Oz)$ donc $x_C = y_C = 0$ puis $3z_C = 6 \Leftrightarrow z_C = 2$; finalement : $\boldsymbol{C(0;0;2)}$.

- **coordonnées de G**

G est le centre de gravité du triangle ABC donc $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

Or, $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}$ a pour coordonnées :

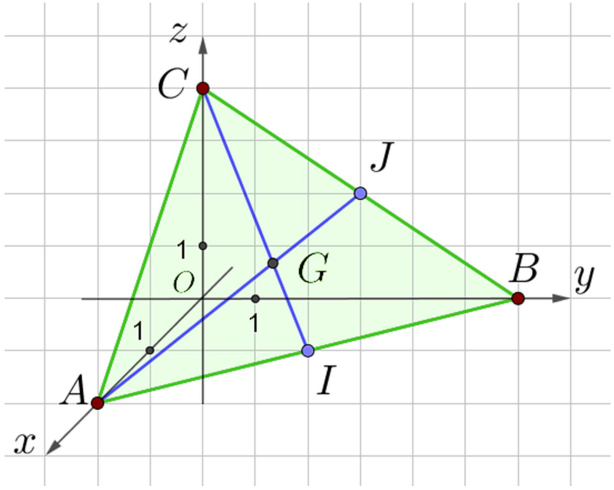
$$\begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \\ z_G - z_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G - x_B \\ y_G - y_B \\ z_G - z_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G - x_C \\ y_G - y_C \\ z_G - z_C \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_G - 2 \\ y_G - 0 \\ z_G - 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G - 0 \\ y_G - 3 \\ z_G - 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_G - 0 \\ y_G - 0 \\ z_G - 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_G - 2 + x_G + x_G \\ y_G + y_G - 3 + y_G \\ z_G + z_G + z_G - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_G - 2 \\ 3y_G - 3 \\ 3z_G - 2 \end{pmatrix}$$

et $\vec{0}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{cases} 3x_G - 2 = 0 \\ 3y_G - 3 = 0 \\ 3z_G - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_G = 2 \\ 3y_G = 3 \\ 3z_G = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2}{3} \\ y_G = 1 \\ z_G = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

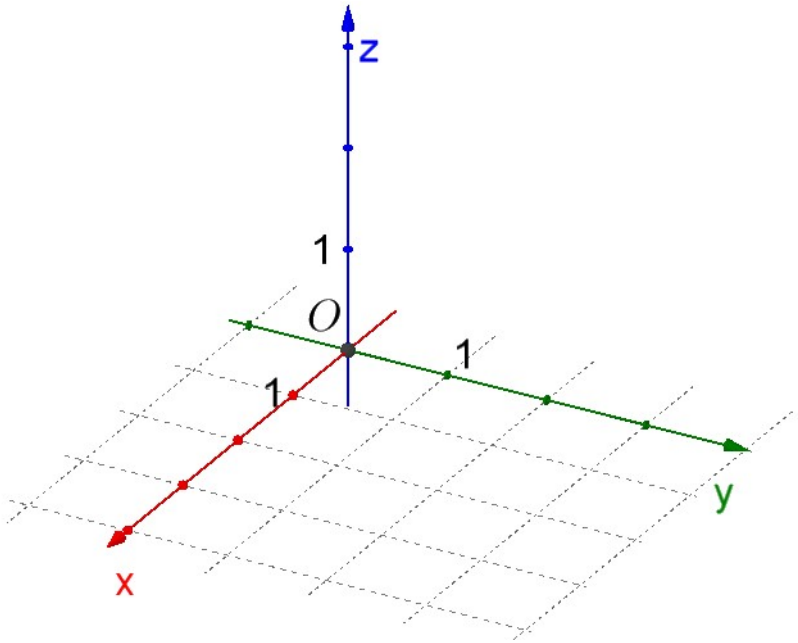
Résumons :

$$\boldsymbol{G\left(\frac{2}{3}; 1; \frac{2}{3}\right)}$$



utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

D16 **Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'origine O on donne $A(1;3;2)$ et $B(2;-1;0)$: placer A et B sur la figure puis déterminer si les points O, A et B sont ou non alignés.**



Corrigé

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_A - x_O \\ y_A - y_O \\ z_A - z_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 3-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Résumons :

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires si et seulement si les trois déterminants 2×2 extraits sont nuls, or on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times (-4) - 1 \times 3 = -4 - 3 = -7 \neq 0$$

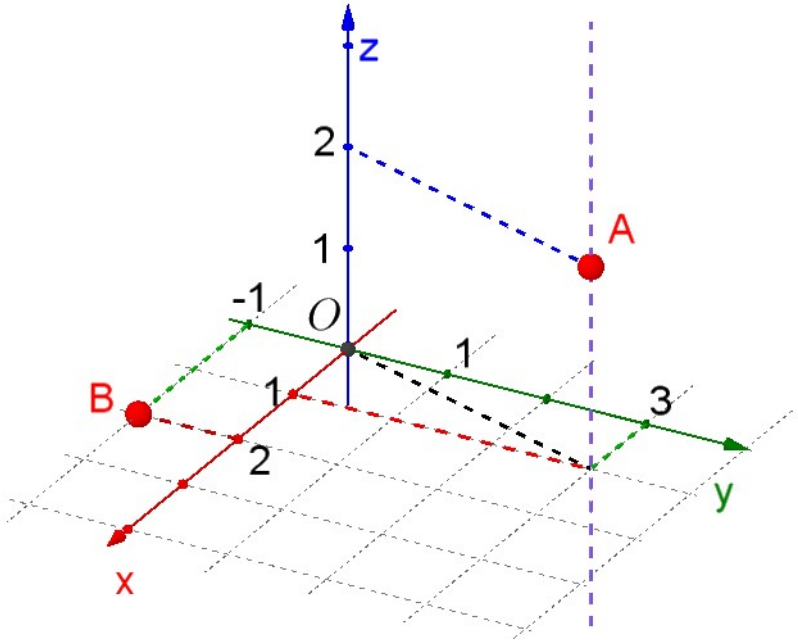
donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires par conséquent 0, A et B <u>ne sont pas</u> alignés.

<u>Autre méthode</u>

$\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ donc dire que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{OA}$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} 1 = 1 \times k \\ -4 = 3 \times k \\ -2 = 2 \times k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -\dfrac{4}{3} \\ k = -1 \end{cases}$$

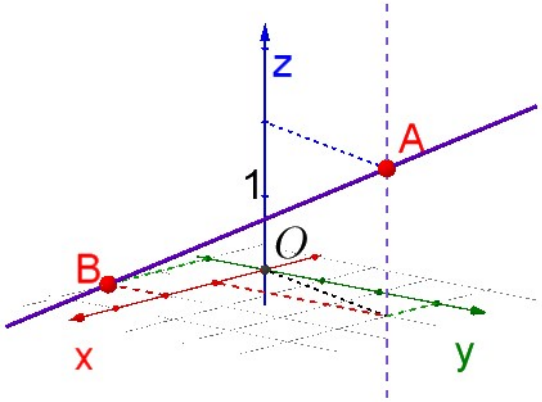
Ce système contient deux équations incompatibles, par exemple L_1 et L_2 donc il <u>n'existe pas</u> $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{OA}$ par conséquent O, A et B <u>ne sont pas</u> alignés.



Sur la figure en perspective cavalière les points O, A et B semblent alignés mais nous avons montré que les points de l'espace ne le sont pas.
On a : points alignés dans l'espace ⇒ points les représentant alignés sur la feuille mais la réciproque, nous le voyons encore dans cet exercice, est fausse.

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

En changeant de point de vue le non alignement devient évident :



utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.