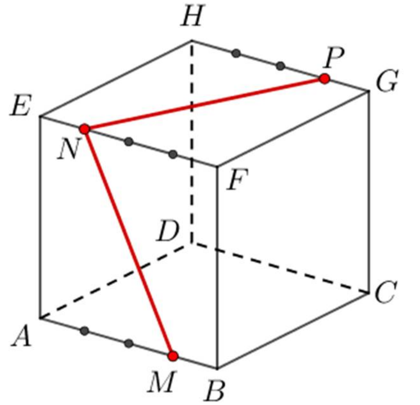
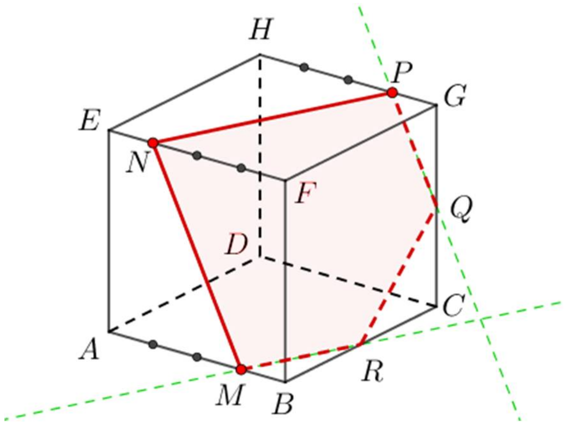
D01 **Tracer la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (MNP)**



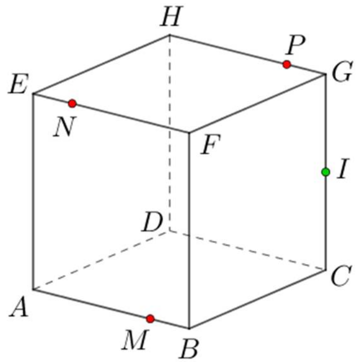
Corrigé



D02 $\boldsymbol{ABCDEFGH}$ **est un cube,**
$\boldsymbol{I}$ **est le milieu de** $[\boldsymbol{CG}]$**,**
$\boldsymbol{M}$**,** $\boldsymbol{N}$ **et** $\boldsymbol{P}$ **sont définis par :**

$$\overrightarrow{EN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{EF},\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\ \ et\ \ \overrightarrow{HP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$$

1. **Exprimer $\overrightarrow{NM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$,**
   exprimer $\overrightarrow{NP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. **Exprimer $\overrightarrow{NI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.**
3. **Les points M, N, P et I sont-ils coplanaires ?**



Corrigé

1. **Exprimer $\overrightarrow{NM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$**

On a :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{NM}\\&=\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AM}\ \ (Chasles)\\&=-\overrightarrow{EN}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AM}\\&=-\frac{1}{4}\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{AE}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\ (avec\ définitions\ de\ N\ et\ M)\\&=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}}$$

Exprimer $\overrightarrow{NP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NP}&=\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}+\frac{3}{4}\overrightarrow{HG}\\&=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

Finalement :

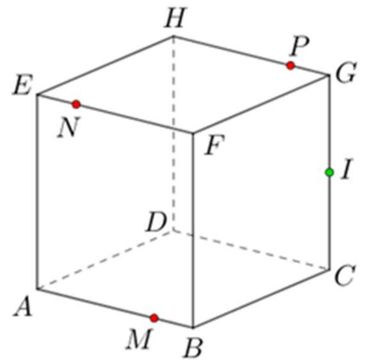
$$\boldsymbol{\overrightarrow{NP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NI}&=\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GI}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}\\&=\frac{3}{4}\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{NI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}}$$



3. Les points M, N, P et I sont-ils coplanaires ?

On cherche s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\overrightarrow{NI} = x\overrightarrow{NM} + y\overrightarrow{NP}$

On a les équivalences :

$$\overrightarrow{NI} = x\overrightarrow{NM} + y\overrightarrow{NP}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = x\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}\right) + y\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} - x\overrightarrow{AE}$$

Comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace, cette égalité est équivalente à :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4} \\ y = 1 \\ -x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1) = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \\ \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{NI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \overrightarrow{NI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{NP} = \vec{0}$$

Il existe une combinaison linéaire non triviale de $\overrightarrow{NI}$, $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{NP}$ donnant $\vec{0}$ donc $\overrightarrow{NI}$, $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont des vecteurs coplanaires par conséquent les points **N, M, P et I sont coplanaires**.

Autre rédaction

Il existe α, β, γ réels non tous nuls tels que $\alpha\overrightarrow{NI} + \beta\overrightarrow{NM} + \gamma\overrightarrow{NP} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{NI}$, $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont des vecteurs coplanaires etc.

D03 $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ **est une base de l'espace, A, E, F et G des points tels que : $\overrightarrow{AE} = -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{u} + 4\vec{v} - 6\vec{w}$ et $\overrightarrow{AG} = \vec{u} + 5\vec{v} - 7\vec{w}$.**

Existe-t-il des réels α et β tels que : $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AF} + \beta\overrightarrow{AG}$?

Que peut-on en déduire pour la position relative des points A, E, F et G ?

Corrigé

Avec les notations de l'exercice on a les équivalences :

$$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AF} + \beta\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \alpha(\vec{u} + 4\vec{v} - 6\vec{w}) + \beta(\vec{u} + 5\vec{v} - 7\vec{w})$$
$$\Leftrightarrow -\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\alpha + \beta)\vec{u} + (4\alpha + 5\beta)\vec{v} + (-6\alpha - 7\beta)\vec{w}$$

Or, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace donc l'égalité précédente est équivalente à :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 4\alpha + 5\beta = 1 \\ -6\alpha - 7\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 - \alpha \\ 4\alpha + 5(-1 - \alpha) = 1 \\ -6\alpha - 7(-1 - \alpha) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 - \alpha \\ 4\alpha - 5 - 5\alpha = 1 \\ -6\alpha + 7 + 7\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 - \alpha \\ -\alpha = 6 \\ \alpha = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = -1 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

On a donc $\overrightarrow{AE} = -6\overrightarrow{AF} + 5\overrightarrow{AG}$ autrement dit $\overrightarrow{AE} + 6\overrightarrow{AF} - 5\overrightarrow{AG} = \vec{0}$, par conséquent il existe une combinaison linéaire non triviale de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ donnant $\vec{0}$ donc $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont des vecteurs coplanaires par conséquent les points **A, E, F et G sont coplanaires**.

Autre rédaction

Il existe α', β', γ' réels non tous nuls tels que $\alpha'\overrightarrow{AE} + \beta'\overrightarrow{AF} + \gamma'\overrightarrow{AG} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont des vecteurs coplanaires etc.

D04 $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ **est une base de l'espace,** A, M, N **et** P **des points tels que :**
$\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} + 3\vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{AN} = 5\vec{u} - \vec{v} + 4\vec{w}$ **et** $\overrightarrow{AP} = -\vec{u} + 7\vec{v} - 2\vec{w}$.
Existe-t-il des réels α **et** β **tels que :** $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{AN}$ **? Que peut-on en déduire pour la position relative des points** A, M, N **et** P **?**

Corrigé

Dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ de l'espace, on a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}-1\\7\\-2\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{AN}$ a pour coordonnées :

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\alpha+5\beta\\3\alpha-\beta\\\alpha+4\beta\end{pmatrix}$$

On a les équivalences :

$$\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+5\beta=-1\\3\alpha-\beta=7\\\alpha+4\beta=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(-2-4\beta)+5\beta=-1\\3(-2-4\beta)-\beta=7\\\alpha=-2-4\beta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-4-8\beta+5\beta=-1\\-6-12\beta-\beta=7\\\alpha=-2-4\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3\beta=3\\-13\beta=13\\\alpha=-2-4\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=-1\\\beta=-1\\\alpha=-2-4(-1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=2\\\beta=-1\end{cases}$$

On a donc : $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$, autrement dit $\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \vec{0}$,
par conséquent il existe une combinaison linéaire non triviale de $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ donnant $\vec{0}$ donc $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont des vecteurs coplanaires par conséquent les points $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ **et** $\boldsymbol{P}$ **sont coplanaires**.

D05 **Dans l'espace muni d'un repère on considère** $A(1;3;5)$, $B(2;5;8)$ **et** $C(4;9;14)$ **: ces trois points sont-ils alignés ?**

Corrigé

$A(1;3;5)$, $B(2;5;8)$, $C(4;9;14)$

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-1\\5-3\\8-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\\z_C-z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-1\\9-3\\14-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

On a : $3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$ donc $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, autrement dit $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$.

Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires,
et comme trois points seulement interviennent, A, B et C, on en déduit que **ces trois points sont alignés**.

D06 **Dans l'espace muni d'un repère on considère les trois vecteurs** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$ **et** $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix}$ **: ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?**

Corrigé

Soient a, b et c trois réels tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.
$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ a pour coordonnées :

$$a\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a+3b-c\\3a-2b+5c\\a+2b+2c\end{pmatrix}$$

Il s'agit donc de résoudre le système :

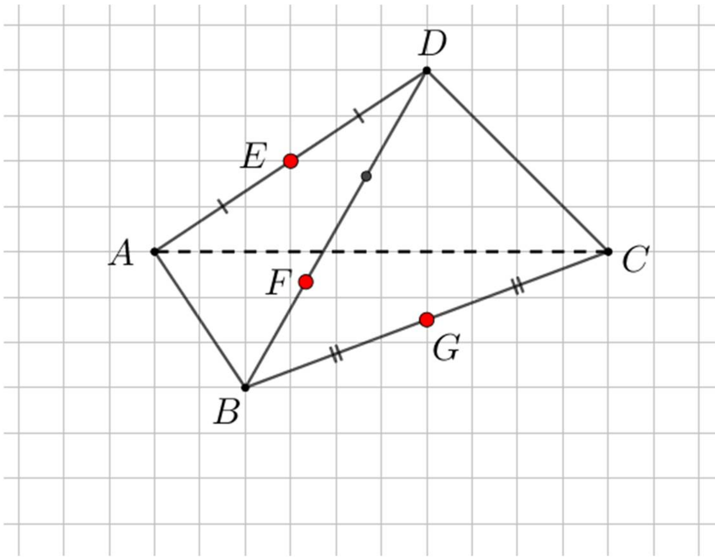
$$\begin{cases}2a+3b-c=0\\3a-2b+5c=0\\a+2b+2c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=2a+3b\\3a-2b+5(2a+3b)=0\\a+2b+2(2a+3b)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}c=2a+3b\\13a+12b=0\\5a+8b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=2a+3b\\b=-\dfrac{13}{12}a\\5a+8\left(-\dfrac{13}{12}\right)a=0\end{cases}$$

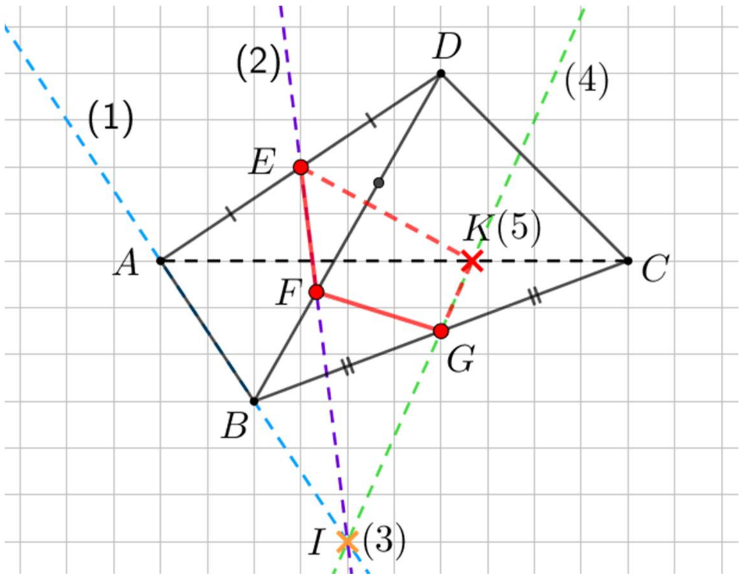
$$\Leftrightarrow \begin{cases}c=2a+3b\\b=-\dfrac{13}{12}a\\-\dfrac{11}{3}a=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\b=-\dfrac{13}{12(0)}\\c=2a+3b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$$

La seule combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ donnant $\vec{0}$ est la combinaison linéaire triviale donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

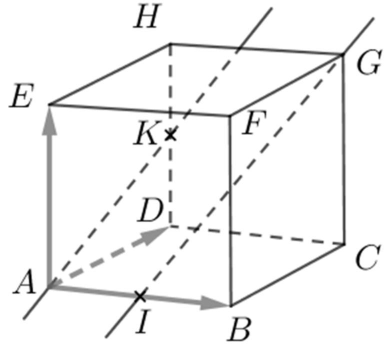
D07 $ABCD$ est un tétraèdre, E est le milieu de $[AD]$, G est le milieu de $[BC]$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$: tracer la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (EFG).



Corrigé



D08 $ABCDEFGH$ est un cube, on note I le milieu de $[AB]$, K le milieu de $[DH]$ et on munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:



- **donner les coordonnées des points A, B, D, G et H puis déterminer les coordonnées des points I et K**
- **donner une représentation paramétrique des droites (IG) et (AK)**
- **(IG) et (AK) sont-elles parallèles, sécantes, non coplanaires ?**

Corrigé

- A est l'origine du repère donc $\boldsymbol{A(0;0;0)}$

$\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{B(1;0;0)}$

$\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{D(0;1;0)}$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{G(1;1;1)}$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{H(0;1;1)}$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$ donc $\boldsymbol{I\left(\frac{1}{2};0;0\right)}$

(on peut aussi utiliser la formule des coordonnées du milieu d'un segment)

K est le milieu de $[DH]$ donc :

$$x_K = \frac{x_D + x_H}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

$$y_K = \frac{y_D + y_H}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$z_K = \frac{z_D + z_H}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\boldsymbol{K\left(0;1;\frac{1}{2}\right)}$

- **représentations paramétriques des droites (IG) et (AK)**

$\overrightarrow{IG}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_G - x_I \\ y_G - y_I \\ z_G - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de la droite (IG) est :

$$\begin{cases} x = x_I + \frac{1}{2}t \\ y = y_I + 1t \\ z = z_I + 1t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Finalement :

$$(\boldsymbol{IG}) : \begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t} \\ \boldsymbol{y = t} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases} \quad (\boldsymbol{t} \in \mathbb{R})$$

$\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_K - x_A \\ y_K - y_A \\ z_K - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 1 - 0 \\ \frac{1}{2} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Une représentation paramétrique de (AK) est :

$$\begin{cases} x = x_A + 0\lambda \\ y = y_A + 1\lambda \\ z = z_A + \frac{1}{2}\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Finalement :

$$(\boldsymbol{AK}) : \begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = \lambda} \\ \boldsymbol{z = \frac{1}{2}\lambda} \end{cases} \quad (\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R})$$

• (IG) et (AK) sont-elles parallèles, sécantes, non coplanaires ?

Rappelons que : $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{IG} \neq \vec{0}$ donc dire que $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{IG}$.

$k\overrightarrow{IG}$ a pour coordonnées :

$$k\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}k \\ k \\ k \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AG}$ revient donc à dire :

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}k \\ 1 = k \\ \frac{1}{2} = k \end{cases}$$

Ce système contient deux lignes incompatibles, par exemple L_2 et L_3 donc $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires.
Les droites (AK) et (IG) peuvent donc être sécantes (elles ont alors exactement un point en commun) ou bien non coplanaires (elles n'ont alors aucun point en commun).
La recherche de point commun à ces deux droites amène à résoudre :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \\ x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \frac{1}{2}\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \\ x = 0 \\ t = \lambda \\ z = \frac{1}{2}\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \\ x = 0 \\ \lambda = -1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ce système contient deux lignes incompatibles, par exemple L_3 et L_6 donc il n'existe pas de point appartenant aux deux droites (IG) et (AK).
Conclusion : les droites $(\boldsymbol{IG})$ **et** $(\boldsymbol{AK})$ **ne sont pas coplanaires**.

Si deux droites de l'espace sont parallèles alors elles sont représentées par deux droites parallèles sur la figure en perspective cavalière mais deux droites qui sont - ou semblent - parallèles sur la figure en perspective cavalière peuvent représenter des droites de l'espace qui ne le sont pas. .

D09 **Dans l'espace muni d'un repère on donne $A(1;2;5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, on note $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x+3y+z=4$.**
On admet que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles et on note I leur point d'intersection : donner une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ puis déterminer les coordonnées de I.

Corrigé

La droite $\mathcal{D}$ passe par $A(1;2;5)$ et admet $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur

donc elle admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases}\boldsymbol{x=1+2t}\\ \boldsymbol{y=2-t}\\ \boldsymbol{z=5+t}\end{cases}\ (\boldsymbol{t}\in\mathbb{R})$.

Le point I appartient à $\mathcal{D}$ donc il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases}x_I=1+2t\\ y_I=2-t\\ z_I=5+t\end{cases}\ (*)$.

d'autre part, I appartient au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+3y+z=4$ donc ses coordonnées vérifient cette équation : $2x_I+3y_I+z_I=4$.
En tenant compte de $(*)$ on obtient :

$$2(1+2t)+3(2-t)+5+t=4 \Leftrightarrow 2+4t+6-3t+5+t=4$$
$$\Leftrightarrow 2t+13=4 \Leftrightarrow 2t=-9 \Leftrightarrow t=-\frac{9}{2}$$

En remplaçant dans $(*)$:

$$x_I=1+2\left(-\frac{9}{2}\right)=1-9=-8$$
$$y_I=2-\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{4}{2}+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$$
$$z_I=5+\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{10}{2}-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{I\left(-8;\frac{13}{2};\frac{1}{2}\right)}$$

.

D10 **Dans une base de l'espace on donne :**

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix},\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\text{ et }\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ \frac{19}{6}\\ \frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

- **les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?**
- **les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?**

Corrigé

• colinéarité éventuelle de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$\vec{u}\neq\vec{0}$ donc dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{v}=k\vec{u}$, c'est-à-dire tel que :

$$\begin{cases}1=2k\\2=5k\\3=3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\k=\frac{2}{5}\\k=1\end{cases}$$

Ce système contient des équations incompatibles donc il n'existe pas k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$, par conséquent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

• les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ revient à dire qu'il existe deux réels α et β tels que : $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.
Le vecteur $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ a pour coordonnées :

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha+\beta\\5\alpha+2\beta\\3\alpha+3\beta\end{pmatrix}$$

L'égalité $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ s'écrit aussi :

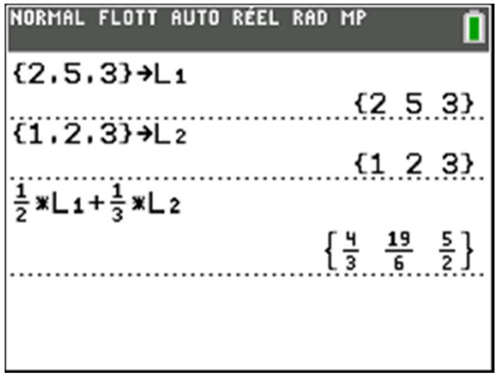
$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=\dfrac{4}{3} \\ 5\alpha+2\beta=\dfrac{19}{6} \\ 3\alpha+3\beta=\dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha+\dfrac{4}{3} \\ 5\alpha+2\left(-2\alpha+\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{19}{6} \\ 3\alpha+3\left(-2\alpha+\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha+\dfrac{4}{3} \\ \alpha+\dfrac{8}{3}=\dfrac{19}{6} \\ -3\alpha+4=\dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha+\dfrac{4}{3} \\ \alpha=\dfrac{19}{6}-\dfrac{16}{6} \\ -3\alpha=\dfrac{5}{2}-\dfrac{8}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha+\dfrac{4}{3} \\ \alpha=\dfrac{1}{2} \\ -3\alpha=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-2\alpha+\dfrac{4}{3} \\ \alpha=\dfrac{1}{2} \\ \alpha=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{2} \\ \beta=-2\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{2} \\ \beta=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$, à savoir $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{1}{3}$, par conséquent $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Vérification à la calculatrice :



On a bien

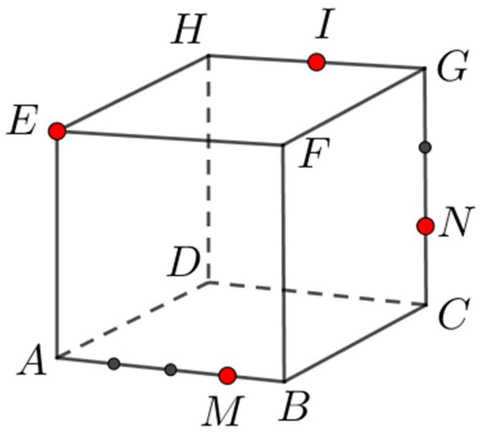
$$\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}=\vec{w}$$

D11 [Recherche]

$ABCDEFGH$ un cube, I est le milieu de $[GH]$, M et N sont définis par :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$$

M, N, I et E sont-ils coplanaires ?



Corrigé

On a d'une part :

$$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AM}\ (Chasles)=-\overrightarrow{AE}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\ \ (définition\ de\ M)$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IN} &\\ &=\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CN}\ (Chasles) \\ &=\frac{1}{2}\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CG}\ \ (définitions\ de\ I\ et\ N) \\ &=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\ (ABCDEFGH\ est\ un\ cube) \\ &=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \\ &=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Résumons :

$$\overrightarrow{EM}=-\overrightarrow{AE}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\ \ et\ \ \overrightarrow{IN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

On a :

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{EM}=\frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AE}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IN}$$

On a : $\overrightarrow{EM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IN}$ donc $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{IN}$ sont colinéaires, par conséquent (EM) et (IN) sont parallèles, on en déduit qu'elles sont parallèles donc coplanaires, par conséquent **M, N, I et E sont coplanaires.**

D12 **Dans l'espace muni d'un repère, on considère :**

$$\boldsymbol{A(1;1:5),\ B(5;-3;11),\ C(0;4;1)}\ \textbf{et}\ \boldsymbol{D(2;6;-1)}$$

Déterminer si les droites (AB) et (CD) sont sécantes ou non.
Dans l'affirmative, calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

Corrigé

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ -3-1 \\ 11-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Comme $A(1\,;1\,;5)$ on en déduit qu'une représenttaion paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 1-4t \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (*) \\ z = 5+6t \end{cases}$$

$\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2-0 \\ 6-4 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C(0\,;4\,;1)$ donc une représenttaion paramétrique de (CD) est :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 4+2\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})\ (**) \\ z = 1-2\lambda \end{cases}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles, donc elles sont soit sécantes (elle ont alors un seul point en commun) soit elles sont non coplanaires (elle n'ont alors aucun point en commun).
La recherche de point commun amène à résoudre le système :

$$\begin{cases} x = 1+4t \\ y = 1-4t \\ z = 5+6t \\ x = 2\lambda \\ y = 4+2\lambda \\ z = 1-2\lambda \end{cases}$$

On a : $x = 1+4t$ et $x = 2\lambda$ donc $2\lambda = 1+4t$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} 2\lambda = 1+4t \\ x = 1+4t \\ y = 1-4t \\ z = 5+6t \\ y = 4+1+4t \\ z = 1-(1+4t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = 1+4t \\ x = 1+4t \\ y = 1-4t \\ z = 5+6t \\ 1-4t = 4+1+4t \\ 5+6t = 1-(1+4t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = 1+4t \\ x = 1+4t \\ y = 1-4t \\ z = 5+6t \\ -4 = 8t \\ 5+6t = -4t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = 1+4t \\ x = 1+4t \\ y = 1-4t \\ z = 5+6t \\ t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = 1+4\left(-\frac{1}{2}\right) \\ x = 1+4\left(-\frac{1}{2}\right) \\ y = 1-4\left(-\frac{1}{2}\right) \\ z = 5+6\left(-\frac{1}{2}\right) \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = 1-2 \\ x = 1-2 \\ y = 1+2 \\ z = 5-3 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Les droites $(\boldsymbol{AB})$ **et** $(\boldsymbol{CD})$ **sont sécantes en** $\boldsymbol{I(-1;3;2)}$**.**

En faisant $t = -\frac{1}{2}$ et $\lambda = -\frac{1}{2}$ dans $(**)$ il faut retrouver les coordonnées de I.

$$1+4t = 1+4\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 1-2 = -1 = x_I$$

Dans $(*)$: $1-4t = 1-4\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 1+2 = 3 \quad = y_I$

$$5+6t = 5+6\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 5-3 = 2 \quad = z_I$$

$$2\lambda = 2\left(-\tfrac{1}{2}\right) \qquad = -1 = x_I$$

et dans $(**)$: $4+2\lambda = 4+2\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 4-1 = 3 \quad = y_I$

$$1-2\lambda = 1-2\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 1+1 = 2 \quad = z_I$$

On retrouve bien les coordonnées de I.

D13 **Dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on note $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :**

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = 11 + 5t \end{cases}$$

- **sans calculs donner un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$**
- **$B(13;9;36)$ appartient-il à $\mathcal{D}$?**
- **$C(-1;2;3)$ appartient-il à $\mathcal{D}$?**
- **$\mathcal{D}$ coupe le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ en E : déterminer les coordonnées de E**

<u>Corrigé</u>

- $A(3;4;11)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$
- B appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x_B = 3 + 2t \\ y_B = 4 + t \\ z_B = 11 + 5t \end{cases}$$

On a les équivalences :

$$\begin{cases} 13 = 3 + 2t \\ 9 = 4 + t \\ 36 = 11 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = 2t \\ 5 = t \\ 25 = 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 5 \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow t = 5$$

Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de B vérifient toutes les équations de la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ donc **B appartient à $\mathcal{D}$**.

- C appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x_C = 3 + 2t \\ y_C = 4 + t \\ z_C = 11 + 5t \end{cases}$$

On a les équivalences :

$$\begin{cases} -1 = 3 + 2t \\ 2 = 4 + t \\ 3 = 11 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 2t \\ -2 = t \\ -8 = 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -\dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Ce système contient deux équations incompatibles, par exemple L_1 et L_3.
Il <u>n'existe pas</u> $t \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de C vérifient toutes les équations de la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ donc **C <u>n'appartient pas</u> à $\mathcal{D}$**.

- $\mathcal{D}$ coupe le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ en E : déterminer les coordonnées de E

$E \in \mathcal{D}$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x_E = 3 + 2t \\ y_E = 4 + t \\ z_E = 11 + 5t \end{cases}$$

Or, $E \in (0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ donc $z_E = 0$.
Le système précédent s'écrit donc :

$$\begin{cases} x_E = 3 + 2t \\ y_E = 4 + t \\ 0 = 11 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 3 + 2\left(-\dfrac{11}{5}\right) \\ y_E = 4 - \dfrac{11}{5} \\ t = -\dfrac{11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \dfrac{15}{5} - \dfrac{22}{5} \\ y_E = \dfrac{20}{5} - \dfrac{11}{5} \\ t = -\dfrac{11}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -\dfrac{7}{5} \\ y_E = \dfrac{9}{5} \\ t = -\dfrac{11}{5} \end{cases}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{E\left(-\frac{7}{5};\frac{9}{5};0\right)}$$

D14 **Dans l'espace muni d'un repère on considère les plans :**

$$\mathcal{P} : x + 2y + z = 5$$
$$\mathcal{Q} : 3x - y + z = 4$$

On admet que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles et on note $\mathcal{D}$ leur droite d'intersection.
On note A le point de $\mathcal{D}$ tel que $z_A = 2$: déterminer x_A et y_A
On note B lepoint de $\mathcal{D}$ tel que $z_B = -5$: déterminer x_B et y_B
Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Corrigé

• $A \in \mathcal{P}$ donc $x_A + 2y_A + z_A = 5$, or $z_A = 2$, donc $x_A + 2y_A + 2 = 5$
autrement dit : $x_A + 2y_A = 3$
$A \in \mathcal{Q}$ donc $3x_A - y_A + z_A = 4$, or $z_A = 2$ donc $3x_A - y_A + 2 = 4$
autrement dit : $3x_A - y_A = 2$

Le couple (x_A, y_A) est donc solution du système : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$

On a les équivalences :

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 3(3 - 2y) - y = 2 \end{cases} \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 9 - 6y - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ -7y = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2(1) \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

On a donc : $\boldsymbol{x_A = y_A = 1}$, donc $A(1; 1; 2)$.

• $B \in \mathcal{P}$ donc $x_B + 2y_B + z_B = 5$, or $z_B = -5$, donc $x_B + 2y_B - 5 = 5$
autrement dit : $x_B + 2y_B = 10$
$B \in \mathcal{Q}$ donc $3x_B - y_B + z_B = 4$, or $z_B = -5$ donc $3x_B - y_B - 5 = 4$
autrement dit : $3x_B - y_B = 9$

Le couple (x_A, y_A) est donc solution du système : $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 2y \\ 3(10 - 2y) - y = 9 \end{cases} \begin{cases} x = 10 - 2y \\ 30 - 6y - y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 2y \\ -7y = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 - 2(3) \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

On a donc : $\boldsymbol{x_B = 4}$ et $\boldsymbol{y_B = 3}$, donc $B(4; 3; -5)$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

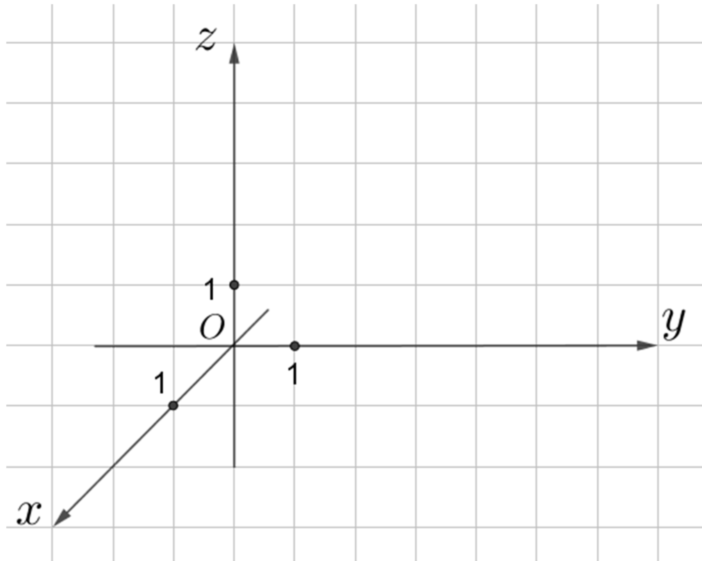
$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 3 - 1 \\ -5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) et $A(1; 1; 2)$ appartient à (AB) donc une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + 3t} \\ \boldsymbol{y = 1 + 2t} \quad (\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}) \\ \boldsymbol{z = 2 - 7t} \end{cases}$$

D15 Dans l'espace muni d'un repère orthogonal on note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 2y + 2z = 6$.

- **$\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses en A : déterminer les coordonnées de A**
- **$\mathcal{P}$ coupe l'axe des ordonnées en B : déterminer les coordonnées de B**
- **$\mathcal{P}$ coupe l'axe des cotes en C : déterminer les coordonnées de C**
- **déterminer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC**
- **sur la figure ci-après représenter le triangle ABC puis placer le point G**



Corrigé

• $A \in \mathcal{P}$: $3x + 2y + 2z = 6$ donc $3x_A + 2y_A + 2z_A = 6$, or $A \in (Ox)$
donc $y_A = z_A = 0$ puis $3x_A = 6 \Leftrightarrow x_A = 2$; finalement : $\boldsymbol{A(2; 0; 0)}$.

• $B \in \mathcal{P}$: $3x + 2y + 2z = 6$ donc $3x_B + 2y_B + 2z_B = 6$, or $B \in (Oy)$
donc $x_B = z_B = 0$ puis $2x_B = 6 \Leftrightarrow x_B = 3$; finalement : $\boldsymbol{B(0; 3; 0)}$.

• $C \in \mathcal{P}$: $3x + 2y + 2z = 6$ donc $3x_C + 2y_C + 2z_C = 6$, or $C \in (Oz)$
donc $x_C = y_C = 0$ puis $3z_C = 6 \Leftrightarrow z_C = 2$; finalement : $\boldsymbol{C(0; 0; 2)}$.

• coordonnées de G

G est le centre de gravité du triangle ABC donc $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$.

Or, $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}$ a pour coordonnées :

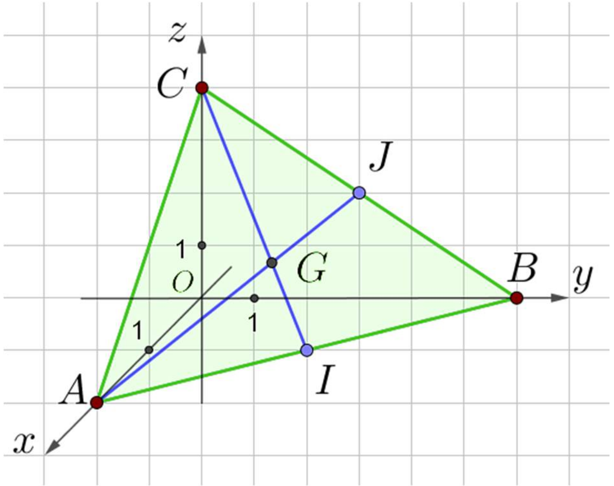
$$\begin{pmatrix}x_G-x_A\\y_G-y_A\\z_G-z_A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_G-x_B\\y_G-y_B\\z_G-z_B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_G-x_C\\y_G-y_C\\z_G-z_C\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x_G-2\\y_G-0\\z_G-0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_G-0\\y_G-3\\z_G-0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_G-0\\y_G-0\\z_G-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x_G-2+x_G+x_G\\y_G+y_G-3+y_G\\z_G+z_G+z_G-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_G-2\\3y_G-3\\3z_G-2\end{pmatrix}$$

et $\vec{0}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{cases}3x_G-2=0\\3y_G-3=0\\3z_G-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_G=2\\3y_G=3\\3z_G=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{2}{3}\\y_G=1\\z_G=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

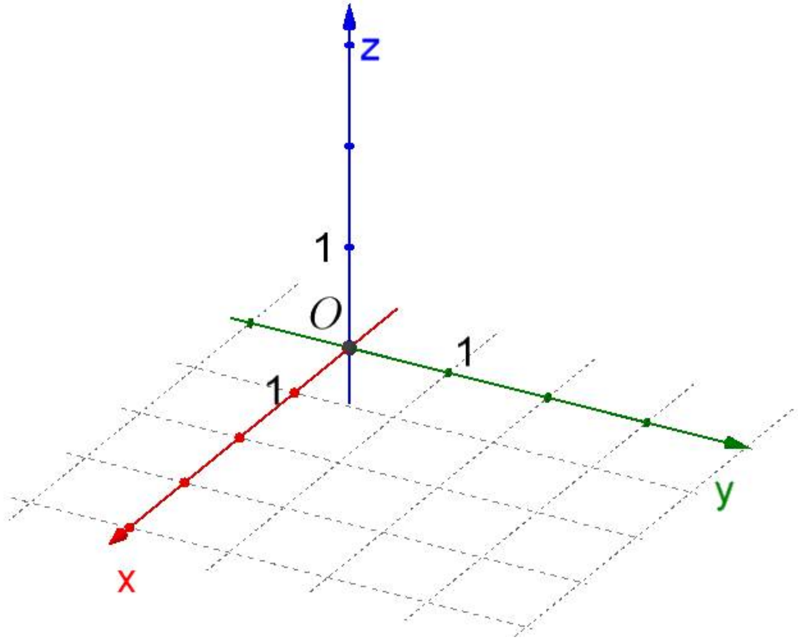
Résumons :

$$\boldsymbol{G\left(\frac{2}{3};1;\frac{2}{3}\right)}$$



Pour placer G on peut placer les points I et J milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$ puis placer G à l'intersection des segments $[AJ]$ et $[CI]$.

D16 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'origine O on donne $A(1;3;2)$ et $B(2;-1;0)$: placer A et B sur la figure puis déterminer si les points O, A et B sont ou non alignés.



Corrigé

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}x_A-x_O\\y_A-y_O\\z_A-z_O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-0\\3-0\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

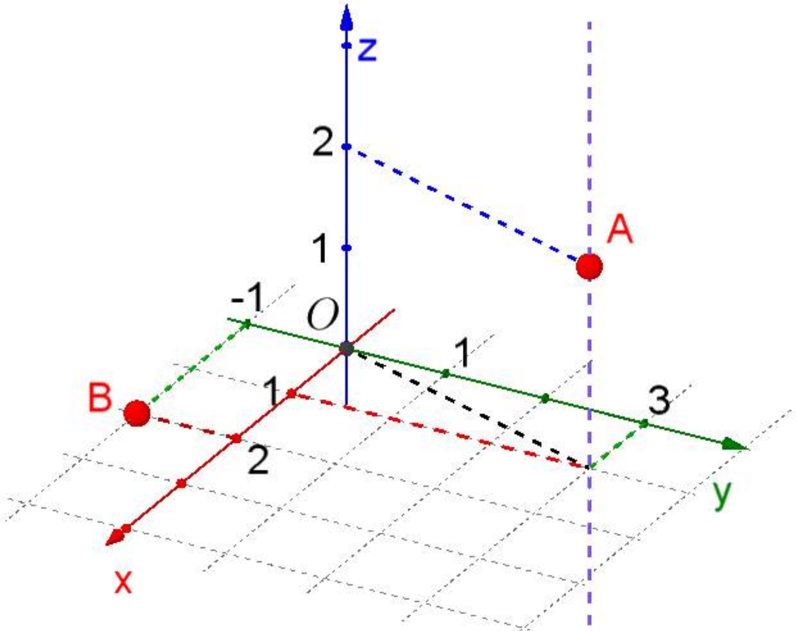
$$\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\-1-3\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$ donc dire que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{OA}$, ce qui s'écrit :

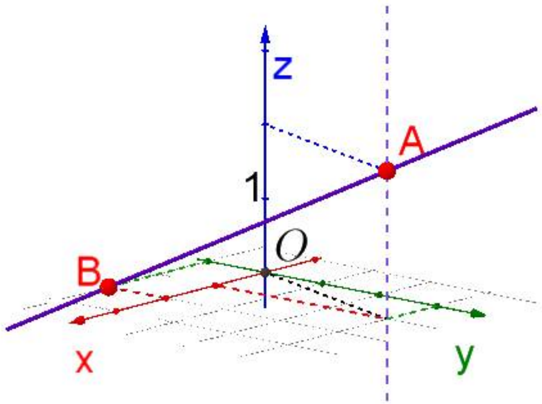
$$\begin{cases}1=1\times k\\-4=3\times k\\-2=2\times k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\ \ 1\\k=-\dfrac{4}{3}\\k=-1\end{cases}$$

Ce système contient deux équations incompatibles, par exemple L_1 et L_2

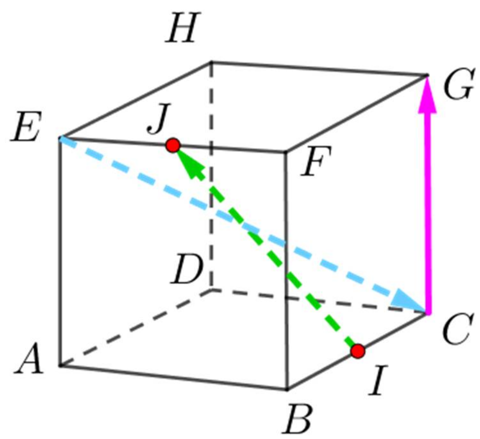
donc il n'existe pas $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{OA}$ par conséquent O, A et B ne sont pas alignés.



Sur la figure en perspective cavalière les points O, A et B semblent alignés mais nous avons montré que les points de l'espace ne le sont pas. On a :
points alignés dans l'espace ⇒ points les représentant alignés sur la feuille mais la réciproque, nous le voyons encore dans cet exercice, est fausse.
En changeant de point de vue le non alignement devient évident :



D17 [Recherche]
Soit $ABCDEFGH$ un cuble, I lemilieu de $[BC]$, J le milieu de $[EF]$: les vecteurs $\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont-ils coplanaires ?



Corrigé
On a :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ}\,(Chasles) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}\;(I\ et\ J\ milieux\ ...)$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF}\right) + \overrightarrow{BF}$$

Or, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG}$
donc :

$$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CG}\right) + \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{IJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \vec{0}$$

Il existe une combinaison linéaire non triviale de $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CG}$ égale à $\vec{0}$ donc ces trois vecteurs sont coplanaires.

Il existe plusieurs autres façons de montrer qu'il existe une combinaison linéaire non tiviale des trois vecteurs égale à $\vec{0}$.
D'autre part, on peut aussi choisir un repère puis raisonner sur les coorodonnées des vecteurs dans ce repère.

D18 **Dans l'espace muni d'un repère, on considère les droites :**

$\mathcal{D}$ **de représenttaion paramétrique** $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\mathcal{D}'$ **de représenttaion paramétrique** $\begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Etudier la position relative de ces deux droites.

Corrigé

• $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$: déterminons si ces deux vecteurs sont ou non parallèles.

On a :

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \times 2 \\ -\frac{1}{2} \times 4 \\ -\frac{1}{2} \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $-\frac{1}{2}\vec{u} = \vec{v}$ par conséquent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

• $A(5; -1; 4) \in \mathcal{D}$: déterm minons si ce point appartient ou non à $\mathcal{D}'$.

Existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x_A = 6 - \lambda \\ y_A = 1 - 2\lambda \\ z_A = 3 + \lambda \end{cases}$ $(*)$?

$$\begin{cases} 5 = 6 - \lambda \\ -1 = 1 - 2\lambda \\ 4 = 3 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 6 - 5 \\ 2\lambda = 1 + 1 \\ \lambda = 4 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ 2\lambda = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $(*)$ donc A appartient aussi à $\mathcal{D}'$.

Conclusion

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles et on un point en commun donc **elles sont confondues**.

D19 **Dans l'espace muni d'un repère, on considère les droites :**

Δ **de représenttaion paramétrique** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Δ' **de représenttaion paramétrique** $\begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 1 - 8\lambda \\ z = 4 + 4\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Etudier la position relative de ces deux droites.

Corrigé

• $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ' : déterminons si ces deux vecteurs sont ou non colinéaires.

On a :

$$(-4) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \times (-1) \\ -4 \times 2 \\ -4 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $-4\vec{u} = \vec{v}$ par conséquent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires : les droites Δ et Δ' sont parallèles.

• $A(2; 3; 1) \in \Delta$: déterm minons si ce point appartient ou non à Δ'.

Existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} x_A = 3 + 4\lambda \\ y_A = 1 - 8\lambda \\ z_A = 4 + 4\lambda \end{cases}$?

$$\begin{cases} 2 = 3 + 4\lambda \\ 3 = 1 - 8\lambda \\ 1 = 4 + 4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda = -1 \\ 8\lambda = -2 \\ 4\lambda = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{4} \\ \lambda = -\frac{1}{4} \\ \lambda = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Ce système contient deux lignes incompatibles, par exemple L_1 et L_3 donc il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $(*)$ par conséquent A n'appartient pas $\mathcal{D}'$.

Conclusion

Les droites Δ et Δ' sont parallèles non confondues donc elles sont **strictement parallèles**.