

D01 Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, 8^n - 5^n$ est un multiple de 3.

Corrigé

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition P_n : « $8^n - 5^n$ est un multiple de 3 ».

• initialisation

Vérifions que P_0 : « $8^0 - 5^0$ est un multiple de 3 » est vraie.

On a : $8^0 - 5^0 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 3$ donc $8^0 - 5^0$ est un multiple de 3 : P_0 est donc vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $8^k - 5^k$ est un multiple de 3 » est vraie (hypothèse de récurrence)

Démontrons que P_{k+1} : « $8^{k+1} - 5^{k+1}$ est un multiple de 3 » est vraie.

On a : $8^k - 5^k$ est un multiple de 3 (H. R.) donc il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $8^k - 5^k = 3\alpha$, d'où $8^k = 3\alpha + 5^k$.

On a :

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 5^{k+1} &= 8 \times 8^k - 5 \times 5^k = 8(3\alpha + 5^k) - 5 \times 5^k \\ &= 24\alpha + 8 \times 5^k - 5 \times 5^k = 24\alpha + 3 \times 5^k = 3(8\alpha + 5^k) \end{aligned}$$

Il existe $\alpha' \in \mathbb{Z}$ tel que $8^{k+1} - 5^{k+1} = 3\alpha'$, à savoir $\alpha' = 8\alpha + 5^k$, donc $8^{k+1} - 5^{k+1}$ est un multiple de 3, autrement dit P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, P_n est vraie, autrement dit :

$\forall n \in \mathbb{N}, 8^n - 5^n$ est un multiple de 3.

D02 Déterminer le sens de variation de (u_n) définie par et $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{(u_n)^2 + 1}$$

Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$u(x) = x^2 \quad u'(x) = 2x$$

$$v(x) = x^2 + 1 \quad v'(x) = 2x$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur $2x$, par conséquent f est croissante (strictement) sur $[0; +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_n : « $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ »

• initialisation

Montrons que P_0 : « $0 \leq u_1 \leq u_0$ » est vraie.

$$\text{On a : } u_1 = \frac{u_0^2}{u_0^2 + 1} = \frac{1^2}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} \text{ et } u_0 = 1$$

On a donc $0 \leq u_1 \leq u_0$ autrement dit P_0 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $0 \leq u_{k+1} \leq u_k$ » est vraie (H. R.), démontrons que P_{k+1} : « $0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$ » est vraie. On a : $0 \leq u_{k+1} \leq u_k$ (H. R.)

Comme f est croissante sur $[0; +\infty[$, elle conserve le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle, on en déduit : $f(0) \leq f(u_k + 1) \leq f(u_k)$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{0^2}{0^2 + 1} &\leq u_{(k+1)+1} \leq u_k + 1 \\ 0 &\leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \end{aligned}$$

Par conséquent P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

On en déduit en particulier que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

D03 Soit (u_n) telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 1$.

Corrigé

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition P_n : « $u_n = n^2 + 1$ ».

• initialisation

Vérifions que P_0 : « $u_0 = 0^2 + 1$ » est vraie.

$u_0 = 1 = 0 + 1 = 0^2 + 1$ donc P_0 est vraie.

• hérédité

soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $u_k = k^2 + 1$ » est vraie (hypothèse de récurrence)

démontrons que P_{k+1} : « $u_{k+1} = (k+1)^2 + 1$ » est vraie.

$u_k = k^2 + 1$ (H.R.)

En ajoutant $2k + 1$ à chaque membre, on obtient :

$$\underbrace{u_k + 2k + 1}_{u_{k+1}} = \underbrace{k^2 + 1 + 2k + 1}_{k^2 + 2k + 1 + 1}$$

$$u_{k+1} = k^2 + 2k + 1 + 1$$

Or, $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ donc :

$u_{k+1} = (k+1)^2 + 1$, autrement dit : P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie autrement dit :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 1$

D04 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 7}$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

En déduire le sens de variation de (u_n) .

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition P_n : « $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ ».

• initialisation

On a : $u_1 = \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$.

Comme $2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$ on en déduit que P_0 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $2 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$ » est vraie (hypothèse de récurrence) et montrons que P_{k+1} : « $2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$ » est vraie.

On a :

$2 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$ (H.R) donc en ajoutant 7 à chaque membre :

$$9 \leq u_k + 7 \leq u_{k+1} + 7 \leq 4 + 7$$

$$9 \leq u_k + 7 \leq u_{k+1} + 7 \leq 11$$

La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$ donc :

$$\sqrt{9} \leq \sqrt{u_k + 7} \leq \sqrt{u_{k+1} + 7} \leq \sqrt{11}$$

puis en remarquant que $\sqrt{9} = 3$ et $\sqrt{11} \approx 3,3$, on obtient :

$$2 \leq 3 \leq \sqrt{u_k + 7} \leq \sqrt{u_{k+1} + 7} \leq \sqrt{11} \leq 4$$

$\Rightarrow 2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$ donc P_{k+1} est vraie

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que,

pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie, autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante.

D05 Démontrer par récurrence que :

$$1^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition

$$P_n : \left\langle 1^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right\rangle$$

• initialisation

On a d'une part : $1^3 = 1$ et d'autre part : $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1$ donc P_1 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $1^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ » (hypothèse de récurrence).

Démontrons que P_{k+1} : « $1^3 + \dots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ » est vraie.

$$\text{On a : } 1^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

donc :

$$1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^2(k+1)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}$$

Or, $(k+2)^2 = k^2 + 4k + 4$ donc :

$$1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

autrement dit P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, 1^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

D06 Un élève obtient avec ChatGPT :

Donne sans aucun commentaire une formule pour la somme :

$$1/(1*2) + 1/(2*3) + \dots + 1/(n*(n+1))$$

• initialisation

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \times (1+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$$

donc P_1 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), montrons que P_{k+1} :

$$\ll \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+2} \gg$$

est vraie.

On a :

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{k+1} \quad (H.R.)$$

On a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)((k+1)+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad (\text{en utilisant l'H.R.}) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= 1 - \left(\frac{1 \times (k+2)}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= 1 - \frac{k+2-1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{k+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$



$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

C'est-à-dire que :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Si cette affirmation est juste, la démontrer, sinon trouver un contre-exemple.

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on considère la proposition P_n :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

On a donc :

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{k+2}$$

donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, P_n est vraie autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

L'affirmation de ChatGPT est donc vraie.

D07 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

En revenant à la définition d'une limite montrer que la suite (u_n) converge vers 2.

Corrigé

□ Recherche

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$?

$$\begin{aligned} |u_n - 2| &= \left| \frac{2n+3}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1} \right| = \left| \frac{2n+3-2(n+1)}{n+1} \right| \\ &= \left| \frac{2n+3-2n-2}{n+1} \right| = \left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$0 < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

□□

Notons n_0 le premier entier naturel strictement plus grand que $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, on a :

$$n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

On a :

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

$n+1$ et $\frac{1}{\varepsilon}$ sont non nuls et de même signes donc leurs inverses sont rangés dans l'ordre inverse :

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

et comme $\frac{1}{n+1} \geq 0$, on a : $\left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$ donc l'inégalité précédente s'écrit :

$$\left| \frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

On a donc :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ (n_0 est le premier entier naturel strictement plus grand que $\frac{1}{\varepsilon} - 1$) tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$

Cela exprime que la suite (u_n) converge vers 2.

Remarque

$\forall x \in \mathbb{R}$, on note $E(x)$ l'entier relatif vérifiant $E(x) \leq x < x+1$, on dit que $E(x)$ est la partie entière de x et que E est la fonction partie entière.

Dans notre exemple, on a : $n_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + 1$, qui, on pourrait le montrer, est un entier positif ou nul donc appartient bien à $\mathbb{N}$.

D08 [Exercice avec recherche]

On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$: conjecturer u_n en fonction de n puis démontrer par récurrence cette conjecture.

Corrigé

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP APP SUR + POUR ΔTb1				
n	u			
0	0			
1	$\frac{1}{2}$			
2	$\frac{4}{5}$			
3	$\frac{13}{14}$			
4	$\frac{40}{41}$			
$n=0$				

On obtient successivement :

$$u_0 = 0 = \frac{0}{1} = \frac{0 \times 2}{1 \times 2} = \frac{0}{2} = \frac{3^0 - 1}{3^0 + 1}$$

$$u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{2(0) + 1}{0 + 2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3^1 - 1}{3^1 + 1}$$

$$u_2 = \frac{2u_1 + 1}{u_1 + 2} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right) + 1}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{3^2 - 1}{3^2 + 1}$$

$$u_3 = \frac{2u_2 + 1}{u_2 + 2} = \frac{2\left(\frac{4}{5}\right) + 1}{\frac{4}{5} + 2} = \frac{\frac{8}{5} + 1}{\frac{14}{5}} = \frac{\frac{13}{5}}{\frac{14}{5}} = \frac{13}{14} = \frac{13}{5} \times \frac{5}{14} = \frac{13 \times 5}{5 \times 14} = \frac{13}{14}$$

$$= \frac{26}{28} = \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_n : « $u_n = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}$ ».

• initialisation

$$\frac{3^0 - 1}{3^0 + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0 = u_0$$

P_0 est vraie

• hérédité

soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence) et démontrons que P_{k+1} est vraie.

On a :

$$u_{k+1} = \frac{2u_k + 1}{u_k + 2} = \frac{2 \times \frac{3^k - 1}{3^k + 1} + 1}{\frac{3^k - 1}{3^k + 1} + 2} \quad (\text{en utilisant H.R.})$$

$$= \frac{\frac{2(3^k - 1)}{3^k + 1} + \frac{3^k + 1}{3^k + 1}}{\frac{3^k - 1}{3^k + 1} + \frac{2(3^k + 1)}{3^k + 1}} = \frac{\frac{2 \times 3^k - 2 + 3^k + 1}{3^k + 1}}{\frac{3^k - 1 + 2 \times 3^k + 2}{3^k + 1}}$$

$$= \frac{3 \times 3^k - 1}{3 \times 3^k + 1} = \frac{3^{k+1} - 1}{3^{k+1} + 1}$$

On a donc :

$$u_{k+1} = \frac{3^{k+1} - 1}{3^{k+1} + 1}$$

par conséquent P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}$$

D09 On pose $u_0 = 14$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3}{7}u_n + 4$$

1. Calculer u_1 .

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$7 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 14$$

3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ .

Corrigé

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP APP SUR + POUR ΔTb1				
n	u			
0	14			
1	10			
2	8.2857			
3	7.551			
4	7.2362			
5	7.1012			
6	7.0434			
7	7.0186			
8	7.008			
9	7.0034			
10	7.0015			
n=0				

1. On a :

$$u_1 = \frac{3}{7}u_0 + 4 = \frac{3}{7}(14) + 4 = 6 + 4 = 10$$

$$u_1 = 10$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition

$$P_n : « 7 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 14 »$$

• initialisation

$u_0 = 14, u_1 = 10$, donc : $7 \leq u_1 \leq u_0 \leq 14$: P_0 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P_k : « 7 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 14 »$ est vraie (hypothèse de récurrence),

Démontrons que $P_{k+1} : « 7 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 14 »$ est vraie.

On a : $7 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 14$ (H.R.), en multipliant par $\frac{3}{7} > 0$ on obtient :

$$\frac{3}{7} \times 7 \leq \frac{3}{7} \times u_{k+1} \leq \frac{3}{7} \times u_k \leq \frac{3}{7} \times 14$$

$$3 \leq \frac{3}{7}u_{k+1} \leq \frac{3}{7}u_k \leq 6$$

puis en ajoutant 4 :

$$3 + 4 \leq \frac{3}{7}u_{k+1} + 4 \leq \frac{3}{7}u_k + 4 \leq 6 + 4$$

$$7 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 10$$

Or $10 \leq 14$ donc $7 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 14$: P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, i.e. : $\forall n \in \mathbb{N}, 7 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 14$.

3. On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, 7 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 14$ on en déduit que :

• $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante

• $\forall n \in \mathbb{N}, 7 \leq u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 7

On en déduit, d'après le théorème de convergence monotone, que la suite (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = \ell$.

D'autre part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{7}u_n = \frac{3}{7}\ell$

puis par limite d'une somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{7}u_n + 4 \right) = \frac{3}{7}\ell + 4$$

par passage dans :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{7}u_n + 4$$

on obtient :

$$\ell = \frac{3}{7}\ell + 4 \Leftrightarrow \ell - \frac{3}{7}\ell = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{7}\ell = 4 \Leftrightarrow \ell = 4 \times \frac{7}{4} \Leftrightarrow \ell = 7$$

Conclusion : $\ell = 7$.

D10 On se donne deux réels a et b , $a \neq 1$.

On considère la suite (u_n) de premier terme u_0 telle que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = au_n + b$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$$

- démontrer que (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison

- exprimer v_n en fonction de n , $n \in \mathbb{N}$

- en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$$

- on suppose que $a \in]-1; 1[$, montre que (u_n) est convergente et préciser sa limite

$$u_0 a - \frac{ab}{1-a} + \frac{b}{1-a} = u_0 a - \frac{ab-b}{1-a} = u_0 a - \frac{b(a-1)}{1-a} = au_0 + b = u_1$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a}$$

$$= au_n + \frac{b-ab-b}{1-a} = au_n - \frac{ab}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = av_n$$

$$v_0 = u_0 - \frac{b}{1-a}$$

$$v_n = v_0 \times a^n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n$$

$$u_n = v_n + \frac{b}{1-a} = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$$

- on suppose que $a \in]-1; 1[$, montre que (u_n) est convergente et préciser sa limite

$a \in]-1; 1[$, autrement dit $-1 < a < 1$, or si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ puis par limite d'un produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n \right] = 0$$

puis par limite d'une somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a} \right] = \frac{b}{1-a}$$

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$$

D11 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par leurs premiers termes respectifs $u_0 = 5, v_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n$$

1. Déterminer u_1 et v_1 puis u_2 et v_2 .
2. Pour tout n entier naturel on pose :
 $s_n = u_n + v_n$ et $d_n = u_n - v_n$
 - a. Conjecturer l'expression de $s_n, n \in \mathbb{N}$, puis démontrer cette conjecture.
 - b. Montrer que (d_n) est géométrique et préciser sa raison puis exprimer d_n en fonction de n .
 - c. Dédire des questions précédentes u_n et v_n en fonction de n .
 - d. Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite ℓ , à préciser.

Corrigé

$u_0 = 5, v_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n$$

1. Déterminer u_1 et v_1 puis u_2 et v_2 .

$$u_1 = \frac{4}{5}u_0 + \frac{1}{5}v_0 = \frac{4}{5}(5) + \frac{1}{5}(1) = \frac{20}{5} + \frac{1}{5} = \frac{21}{5}$$

$$v_1 = \frac{1}{5}u_0 + \frac{4}{5}v_0 = \frac{1}{5}(5) + \frac{4}{5}(1) = \frac{5}{5} + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

$$u_2 = \frac{4}{5} \times \frac{21}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{84}{25} + \frac{9}{25} = \frac{84+9}{25} = \frac{93}{25}$$

$$v_2 = \frac{1}{5} \times \frac{21}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{21}{25} + \frac{36}{25} = \frac{57}{25}$$
2. Pour tout n entier naturel on pose : $s_n = u_n + v_n$ et $d_n = u_n - v_n$.
 - a. Conjecturer la nature de (s_n) puis la démontrer.

$$s_0 = u_0 + v_0 = 5 + 1 = 6$$

$$s_1 = u_1 + v_1 = \frac{21}{5} + \frac{9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$s_2 = u_2 + v_2 = \frac{93}{25} + \frac{57}{25} = \frac{150}{25} = \frac{25 \times 6}{25 \times 1} = 6$$

On constate que $s_0 = s_1 = s_2 = 6$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $P_n : « s_n = 6 »$.

• initialisation

On a déjà obtenu $s_0 = 6$ donc P_0 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P_k : « s_k = 6 »$ (hypothèse de récurrence) est vraie et démontrons que $P_{k+1} : « s_{k+1} = 6 »$ est vraie.

On a :

$$s_{k+1} = u_{k+1} + v_{k+1} = \frac{4}{5}u_k + \frac{1}{5}v_k + \frac{1}{5}u_k + \frac{4}{5}v_k = u_k + v_k = s_k$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $s_k = 6$, donc on obtient $s_{k+1} = 6$ par conséquent P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc : $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = 6$.

- b. Montrer que (d_n) est géométrique et préciser sa raison puis exprimer d_n en fonction de n .

On a :

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n - \left(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n \right) \\ &= \frac{4}{5}u_n - \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n - \frac{4}{5}v_n = \frac{3}{5}u_n - \frac{3}{5}v_n = \frac{3}{5}(u_n - v_n) \\ &= \frac{3}{5}d_n \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = \frac{3}{5}d_n$ donc la suite (d_n) est géométrique de raison $\frac{3}{5}$, par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = d_0 \times q^n = 4 \times \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

Résumons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = 4 \times \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

c. Dédurre des questions précédente u_n et v_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_n + v_n = 6 \\ u_n - v_n = 4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_n + v_n = 6 \\ 2v_n = 6 - 4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_n + v_n = 6 \\ v_n = 3 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = 6 - \left(3 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) \\ v_n = 3 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_n = 3 + 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ v_n = 3 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 3 + 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ v_n = 3 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{cases}$$

d. Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite ℓ à préciser

$$-1 < \frac{3}{5} < 1, \text{ or, si } -1 < q < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0, \text{ puis } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = 0$$

Par limite d'une somme on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = 3$$

et par limite d'une différence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = 3$$

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$$

D12 (u_n) est définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 12}{u_n + 2}$$

Pour tout n entier naturel on pose :

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 4}$$

- calculer u_1 et u_2 : la suite (u_n) est-elle monotone ?
- calculer v_0 sous forme de fraction irréductible
- montrer que (v_n) est géométrique, préciser sa raison
- exprimer v_n puis u_n en fonction de n (on admet que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 1$)
- déterminer la limite éventuelle de (u_n)

Corrigé

$$u_0 = 6 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 12}{u_n + 2}, v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 4}$$

- calculer u_1 et u_2 : la suite (u_n) est-elle monotone ?

$$u_1 = \frac{u_0 + 12}{u_0 + 2} = \frac{6 + 12}{6 + 2} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

$$u_2 = \frac{u_1 + 12}{u_1 + 2} = \dots = \frac{57}{17}$$

$u_1 < u_0$ donc (u_n) n'est pas croissante

$u_2 > u_1$ donc (u_n) n'est pas décroissante

La suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante donc (u_n) n'est pas monotone

- calculer v_0 sous forme de fraction irréductible

$$v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 + 4} = \frac{6 - 3}{6 + 4} = \frac{3}{10}$$

- montrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 4} = \frac{\frac{u_n + 12}{u_n + 2} - 3}{\frac{u_n + 12}{u_n + 2} + 4} = \frac{\frac{u_n + 12}{u_n + 2} - \frac{3(u_n + 2)}{u_n + 2}}{\frac{u_n + 12}{u_n + 2} + \frac{4(u_n + 2)}{u_n + 2}} = \frac{u_n + 12 - 3u_n - 6}{u_n + 12 + 4u_n + 8} = \frac{-2u_n + 6}{5u_n + 20} = \frac{-2(u_n - 3)}{5(u_n + 4)} = \frac{2}{5} v_n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{u_n + 12 - 3(u_n + 2)}{u_n + 2}}{\frac{u_n + 12 + 4(u_n + 2)}{u_n + 2}} = \frac{u_n + 12 - 3u_n - 6}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{u_n + 12 + 4u_n + 8} \\
&= \frac{-2u_n + 6}{5u_n + 20} = \frac{-2(u_n - 3)}{5(u_n + 4)} = -\frac{2}{5} \times \frac{u_n - 3}{u_n + 4} = -\frac{2}{5} v_n
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+2} = -\frac{2}{5} v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison $\left(-\frac{2}{5}\right)$.

• exprimer v_n puis u_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(v_n) est géométrique donc $v_n = v_0 \times q^n$, or $v_0 = \frac{3}{10}$ et $q = -\frac{2}{5}$ donc

$$v_n = \frac{3}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n$$

Or,

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 4}$$

$$v_n(u_n + 4) = u_n - 3$$

$$u_n \times v_n + 4v_n = u_n - 3$$

$$u_n \times v_n - u_n = -3 - 4v_n$$

$$u_n(v_n - 1) = -3 - 4v_n$$

$$u_n = \frac{-3 - 4v_n}{v_n - 1}$$

$$u_n = \frac{3 + 4v_n}{1 - v_n} = \frac{3 + 4 \times \frac{3}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3 + \frac{6}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n}$$

Vérification Pour $n = 2$, cette formule donne :

$$u_2 = \frac{3 + \frac{12}{10} \times \frac{4}{25}}{1 - \frac{3}{10} \times \frac{4}{25}} = \frac{57}{17} \text{ (calculatrice)}$$

• montrer que (u_n) est convergente et préciser sa limite

$-1 < -\frac{2}{5} < 1$ or, si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n = 0$, par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

puis :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{6}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n\right) = 3$$

De même, on montrerait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n\right) = 1$$

donc par limite d'un quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{6}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n} = 3$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

.

.

D13 On pose $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 1}$$

1. Soit f la fonction définie sur $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x + 1}$$

Déterminer le sens de variation de f sur $] - 1 ; +\infty[$.

2. Calculer u_1 .

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

4. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Corrigé

Graph1 Graph2 Graph3	
TYPE: SUITE(n) SUITE(n+1) SUITE(n+2)	
nMin=0	
u(n+1)=(3*u(n)+1)/(u(n)+1)	
u(0)=1	
u(1)=	
v(n+1)=	
v(0)=	
v(1)=	
w(n+1)=	

n	u				
0	1				
1	2				
2	2.3333				
3	2.4				
4	2.4118				
5	2.4138				
6	2.4141				
7	2.4142				
8	2.4142				
9	2.4142				
10	2.4142				

1. f est quotient de deux fonction affines donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, c'est-à-dire sur $] - 1 ; +\infty[$

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x + 1}$$

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$u(x) = 3x + 1 \quad u'(x) = 3$$

$$v(x) = x + 1 \quad v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{3(x + 1) - 1(3x + 1)}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x + 3 - 3x - 1}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x + 1)^2}$$

Pour tout $x \in] - 1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est (strictement) croissante sur $] - 1 ; +\infty[$.

2. On a :

$$u_1 = \frac{3u_0 + 1}{u_0 + 1} = \frac{3(1) + 1}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$u_1 = 2$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition

$$P_n : « 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3 »$$

• initialisation

On a : $1 \leq 1 \leq 2 \leq 3$, or $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, donc $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$ par conséquent P_0 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P_k : « 1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 3 »$ est vraie (hypothèse de récurrence) et démontrons que $P_{k+1} : « 1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 3 »$ est vraie.

Les nombres $1, u_k, u_{k+1}$ et 3 appartiennent tous à l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$ sur lequel f est croissante donc conserve le sens de la relation d'ordre.

On a : $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 3$ donc : $f(1) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(3)$

Or,

$$f(1) = \frac{3(1) + 1}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2 \quad f(u_k) = \frac{3u_k + 1}{u_k + 1} = u_{k+1}$$

$$f(u_{k+1}) = \frac{3u_{k+1} + 1}{u_{k+1} + 1} = u_{k+2} \quad f(3) = \frac{3(3) + 1}{3 + 1} = \frac{10}{4} = 2,5$$

On a obtenu donc : $2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2,5$

donc : $1 \leq 2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2,5 \leq 3$ d'où : $1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 3$ par conséquent P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

4. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$ donc (u_n) est majorée par la constante 3

Il est important de traiter séparément les deux conséquences de « $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ ».

La suite (u_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone elle est convergente.

Notons ℓ sa limite et rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 1} \quad (*)$$

On a d'une part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} u_N = \ell$$

et d'autre part, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3u_n + 1) = 3\ell + 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + 1) = \ell + 1$$

donc par limite d'un quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{3\ell + 1}{\ell + 1}$$

Par passage à la limite de l'égalité (*) on obtient :

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{3\ell + 1}{\ell + 1} \\ \ell(\ell + 1) &= 3\ell + 1 \\ \ell^2 + \ell - 3\ell - 1 &= 0 \\ \ell^2 - 2\ell - 1 &= 0 \end{aligned}$$

donc ℓ est solution de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$.

$x^2 - 2x - 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$, de discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 4 + 4 = 8$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$\Delta > 0$ donc $x^2 - 2x - 1$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 - 2\sqrt{2}}{2(1)} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{2} = 1 - \sqrt{2} \approx -0,4$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 + 2\sqrt{2}}{2(1)} = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{2} = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4$$

Or, par passage à la limite des inégalités de la question 3. on obtient $1 \leq \ell \leq 3$ donc x_1 est rejeté et x_2 est accepté.

Finalement : $\ell = 1 + \sqrt{2}$.

D14 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{4n + 3}{n + 1}$$

En revenant à la définition d'une limite démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

Corrigé

Question :

« $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $|u_n - 4| < \varepsilon$ » ?

$$\begin{aligned} |u_n - 4| &= \left| \frac{4n + 3}{n + 1} - 4 \right| = \left| \frac{4n + 3}{n + 1} - \frac{4(n + 1)}{n + 1} \right| = \left| \frac{4n + 3 - 4(n + 1)}{n + 1} \right| \\ &= \left| \frac{4n + 3 - 4n - 4}{n + 1} \right| = \left| \frac{-1}{n + 1} \right| = \left| -\frac{1}{n + 1} \right| \end{aligned}$$

Or, pour $x < 0$ on a : $|x| = -x$ donc :

$$\left| -\frac{1}{n + 1} \right| = -\left(-\frac{1}{n + 1} \right) = \frac{1}{n + 1}$$

Dire : $|u_n - 4| < \varepsilon$ revient donc à dire : $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, c'est-à-dire $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

ou encore $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Notons n_0 le premier entier naturel strictement plus grand que $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$: on a : $n \geq n_0$ et $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ donc $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

donc $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ puis $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ et enfin $|u_n - 4| < \varepsilon$.

Résumons

$\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, n_0 est le plus petit entier naturel strictement plus

grand que $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - 4| < \varepsilon$

ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

D15 On pose $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 1,5u_n + 3$.

1. Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.
2. Écrire un programme Python qui demande à l'utilisateur d'entrer un réel A puis affiche le premier entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n , si $n \geq n_0$ alors $u_n > A$. (en admettant qu'un tel n_0 existe)
3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 16 \times 1,5^n - 6$.
4. En déduire que :
 $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $u_n > A$

Corrigé

$u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1,5u_n + 3$

Graph1	Graph2	Graph3
TYPE: SUITE(n)	SUITE(n+1)	SUITE(n+2)
nMin=0		
%u(n+1)=1.5*u(n)+3		
u(0)=10		
u(1)=		
%v(n+1)=		
v(0)=		
v(1)=		
%w(n+1)=		

n	u			
0	10			
1	18			
2	30			
3	48			
4	75			
5	115.5			
6	176.25			
7	267.38			
8	404.06			
9	609.09			
10	916.64			

n=0

1. Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.
 $u_1 = 1,5 \times u_0 + 3 = 1,5 \times 10 + 3 = 15 + 3 = 18$
 $u_1 = 18$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $P_n : « u_n \leq u_{n+1} »$

initialisation

On a : $10 \leq 18$, or $u_0 = 10$ et $u_1 = 18$, donc $u_0 \leq u_1 : P_0$ est vraie.

hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P_k : « u_k \leq u_{k+1} »$ est vraie (hypothèse de récurrence), montrons que $P_{k+1} : « u_{k+1} \leq u_{k+2} »$ est vraie.

On a : $u_k \leq u_{k+1}$ (hypothèse de récurrence)

en multipliant par $1,5 > 0$ on obtient : $1,5u_k \leq 1,5u_{k+1}$
 puis en ajoutant 3 : $1,5u_k + 3 \leq 1,5u_{k+1} + 3$
 c'est-à-dire : $u_{k+1} \leq u_{k+2}$ donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ ce qui montre que la suite (u_n) est croissante

2. Programme Python qui demande à l'utilisateur d'entrer un réel A puis affiche le premier entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $u_n > A$ (en admettant qu'un tel n_0 existe)

```

1 A=eval(input("réel A="))
2 U=10
3 n=0
4 while U<=A:
5     U=1.5*U+3
6     n=n+1
7 print("n0=",n)

```

3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 16 \times 1,5^n - 6$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition $P_n : « u_n = 16 \times 1,5^n - 6 »$

• initialisation

$16 \times 1,5^0 - 6 = 16 \times 1 - 6 = 10 = u_0 : P_0$ est vraie

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P_k : « u_k = 16 \times 1,5^k - 6 »$ est vraie (hypothèse de récurrence), montrons que $P_{k+1} : « u_{k+1} = 16 \times 1,5^{k+1} - 6 »$ est vraie.

On a : $u_k = 16 \times 1,5^k - 6$ (H.R.).

En multipliant par 1,5 on obtient :

$$1,5u_k = 1,5(16 \times 1,5^k - 6)$$

$$1,5u_k = 16 \times 1,5^{k+1} - 1,5 \times 6$$

$$1,5u_k = 16 \times 1,5^{k+1} - 9$$

Puis en ajoutant 3 :

$$1,5u_k + 3 = 16 \times 1,5^{k+1} - 9 + 3$$

$$u_{k+1} = 16 \times 1,5^{k+1} - 6$$

Par conséquent P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 16 \times 1,5^n - 6$$

4. En déduire que :

$\forall A \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $u_n > A$.

$1,5 > 1$ or, si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,5^n = +\infty$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (16 \times 1,5^n) = +\infty$ puis par limite d'une différence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (16 \times 1,5^n - 6) = +\infty \text{ autrement dit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

En revenant à la définition de la divergence vers $+\infty$ on obtient :

$\forall A \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $u_n > A$

ce qui est précisément ce que nous devions justifier.

D16 [d'après bac]

On pose $u_0 = v_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ et $v_n \geq 1$.

1. Calculer u_1 et v_1 .
2. Déterminer le sens de variation de (u_n) .
3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n + 1$.
En déduire la limite de (u_n) .
4. Justifier que : « pour tout réel A , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq A$ ». Le programme Python suivant demande d'entrer A puis détermine le plus petit entier naturel n_0 :

```

1 U,V=1,1
2 A=eval(input("A="))
3 n=0
4 while
5     U,V=
6     n=n+1
7 print("n0=",n)

```

Recopier sur la copie, en les complétant, les lignes 4 et 5 puis à l'aide de ce programme, déterminer le plus petit n_0 correspondant à $A = 1\,000\,000$.

Corrigé

$u_0 = v_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$
pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ et $v_n \geq 1$

Graph1	Graph2	Graph3
TYPE: SUITE(n)	SUITE(n+1)	SUITE(n+2)
nMin=0		
u(n+1)=u(n)+v(n)		
u(0)=1		
u(1)=		
v(n+1)=2u(n)+v(n)		
v(0)=1		
v(1)=		
v(n+1)=		

n	u	v
0	1	1
1	2	3
2	5	7
3	12	17
4	29	41
5	70	99
6	169	239
7	408	577
8	985	1393
9	2378	3363
10	5741	8119
n=0		

1. Calculer u_1 et v_1 .

$$u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2 \quad v_1 = 2u_0 + v_0 = 2(1) + 1 = 3$$

2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = u_n + v_n - u_n = v_n \geq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

3. Démontrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq n + 1$.

En déduire la limite de (u_n) .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition P_n : « $u_n \geq n + 1$ ».

• initialisation

$u_0 = 1$ et $0 + 1 = 1$ donc $u_0 \geq 0 + 1$, P_0 est vraie

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $u_k \geq k + 1$ » est vraie (hypothèse de récurrence), montrons que P_{k+1} : « $u_{k+1} \geq k + 2$ » est vraie.

On a : $u_k \geq k + 1$ (hypothèse de récurrence) et $v_k \geq 1$.

En ajoutant membre à membre, on obtient : $u_k + v_k \geq (k + 1) + 1$, c'est-à-dire : $u_{k+1} \geq k + 2$, donc P_{k+1} est vraie.

conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n + 1$.

Par limite d'une somme on a immédiatement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$.

On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n + 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty \end{cases}$ donc d'après le théorème de

comparaison on en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$, en revenant à la définition d'une limite on obtient

« pour tout réel A , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq A$ ».

Ligne 4 while U<=A: Ligne 5 U,V=U+V,2*U+V

Pour $A = 1\,000\,000$ on obtient $n_0 = 16$.

vérification avec la calculatrice :

15	470832	66585
16	1.14E6	1.61E
u(16)=1136689		

D17 [d'après bac]

On pose $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2 - v_n}$$

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 < v_n < 1$.

- b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 1)^2}{2 - v_n}$$

- c. Démontrer que (v_n) est convergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$w_n = \frac{1}{v_n - 1}$$

Démontrer que (w_n) est arithmétique, en préciser la raison et le premier terme, exprimer w_n puis v_n en fonction de n .

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

4. Justifier que : « pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $|v_n - 1| < \varepsilon$ ».

Déterminer le plus petit de ces entiers n_0 en fonction de ε .

Corrigé

On pose $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2 - v_n}$$

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP DEUXIÈME CONDITION SI NÉCESSAIRE			
Graph1	Graph2	Graph3	
TYPE: SUITE(n)	SUITE(n+1)	SUITE(n+2)	
u(1)=			
v(n+1) = 1 / (2 - v(n))			
v(0) = 0			
v(1) =			
w(n+1) = 1 / (v(n+1) - 1)			
w(0) =			
w(1) =			

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP APP SUR + POUR ΔTb1			
n	v	w	
0	0	-1	
1	1/2	-2	
2	2/3	-3	
3	3/4	-4	
4	4/5	-5	
n=0			

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 < v_n < 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on considère la proposition

P_n : « $0 < v_n < 1$ ».

- initialisation (pour $n = 1$ et non $n = 0$)

$$v_1 = \frac{1}{2 - v_0} = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

On a : $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $0 < v_1 < 1$: P_1 est vraie.

- hérédité

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que P_k : « $0 < v_k < 1$ » est vraie (hypothèse de récurrence) et montrons que P_{k+1} : « $0 < v_{k+1} < 1$ » est vraie.

On a : $0 < v_k < 1$ (H.R.) donc en multipliant par $-1 < 0$:

$0 > -v_k > -1$, puis en ajoutant 1 : $2 > 2 - v_k > 1$

Les nombres $\frac{1}{2}$, $2 - v_k$ et 1 sont non nuls et de même signe donc en prenant leurs inverses on inverse le sens de la relation d'ordre :

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2 - v_k} < \frac{1}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2 - v_k} < 1$$

$$0 < \frac{1}{2} < v_{k+1} < 1$$

$$0 < v_{k+1} < 1$$

P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, P_n est vraie, autrement dit :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < v_n < 1$.

- b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 1)^2}{2 - v_n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2 - v_n} - v_n = \frac{1}{2 - v_n} - \frac{v_n(2 - v_n)}{2 - v_n}$$

$$= \frac{1 - v_n(2 - v_n)}{2 - v_n} = \frac{1 - 2v_n + v_n^2}{2 - v_n} = \frac{(v_n)^2 - 2(v_n)(1) + (1)^2}{2 - v_n}$$

$$= \frac{(v_n - 1)^2}{2 - v_n}$$

On a donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 1)^2}{2 - v_n}$$

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

- on a montré en a. que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < v_n < 1$, et comme $v_0 = 0$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n < 1$ donc la suite (v_n) est majorée par la constante 1
- On a montré en b. que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 1)^2}{2 - v_n}$$

Or, $(v_n - 1)^2 \geq 0$ et $2 - v_n > 0$ donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n \geq 0$ donc la suite (v_n) est croissante

La suite (v_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone **elle est convergente**.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$w_n = \frac{1}{v_n - 1}$$

Démontrer que (w_n) est arithmétique, en préciser la raison et le premier terme, exprimer w_n puis v_n en fonction de n .

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1} - 1} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1}{\frac{1}{2 - v_n} - 1} - \frac{1}{v_n - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2 - v_n} - \frac{2 - v_n}{2 - v_n}} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1}{\frac{1 - (2 - v_n)}{2 - v_n}} - \frac{1}{v_n - 1}$$

$$= \frac{2 - v_n}{-1 + v_n} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{2 - v_n}{v_n - 1} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1 - v_n}{v_n - 1} = -1$$

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n = -1$ et -1 est une constante donc la suite (w_n) **est arithmétique de raison (-1)** .

On a :

$$w_0 = \frac{1}{v_0 - 1} = \frac{1}{0 - 1} = -1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = w_0 + nr = -1 + n \times (-1) = -n - 1$$

Résumons : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = -n - 1$.

Or

$$w_n = \frac{1}{v_n - 1}$$

$$v_n - 1 = \frac{1}{w_n}$$

$$v_n = \frac{1}{w_n} + 1 = 1 - \frac{1}{n + 1}$$

Résumons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 - \frac{1}{n + 1}$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Justifier que : « pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $|v_n - 1| < \varepsilon$ ».

Déterminer le plus petit de ces entiers n_0 en fonction de ε .

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$ donc par limite d'un quotient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + 1} = 0$$

puis par limite d'une différence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n + 1} \right) = 1$$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

En revenant à la définition d'une limite, et du fait que (u_n) converge vers 1, on peut affirmer que : « pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geq n_0$ alors $|v_n - 1| < \varepsilon$ ».

Recherche

$$|v_n - 1| = \left| 1 - \frac{1}{n+1} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$$

dire que $|v_n - 1| < \varepsilon$ revient à dire $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Notons n_0 le plus petit entier naturel strictement plus grand que $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.

On a : $n \geq n_0$ et $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ donc $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, donc $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$

On obtient alors :

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\left| -\frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| 1 - \frac{1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$|v_n - 1| < \varepsilon$$

On a donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ (n_0 plus petit entier naturel strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ convient) tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |v_n - 1| < \varepsilon$.