

## Défis à résoudre

**Défi 17** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n \geq 5 \ln(2)$ .

**Défi 18** Pour  $a$  et  $b$  réels strictement positifs, comparer :

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ et } \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}$$

**Défi 19**  $f$  est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  de courbe représentative  $\mathcal{C}$  dans un repère orthonormé du plan,  $A(x_A, y_A)$  est un point n'appartenant pas à  $\mathcal{C}$ ,  $M(x, f(x))$  est un point variable de  $\mathcal{C}$ . Un élève affirme : « si  $AM$  atteint un minimum absolu en  $M_0 \in \mathcal{C}$ , alors la droite  $(AM_0)$  est perpendiculaire à la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M_0$  ».

Si cette affirmation est vraie, la démontrer, sinon en donner un contre-exemple.

**Défi 20** On pose  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$ .  
Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.