

Défi 01 [Classique] a, b et c sont trois réels strictement positifs, comparer :

$$E = \frac{a+b+c}{3} \quad \text{et} \quad F = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Corrigé

Pour a, b et c strictement positifs, on a :

$$\begin{aligned} E - F &= \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \\ &= \frac{(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 9}{3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \\ &= \frac{1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{c} - 9}{3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \\ &= \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 6}{3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \quad (*) \end{aligned}$$

• Méthode proposée par Loïc P.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a-b)^2 + 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} + 2$$

De même :

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{(b-c)^2}{bc} + 2 \quad \text{et} \quad \frac{c}{a} + \frac{a}{c} = \frac{(c-a)^2}{ca} + 2$$

Donc, en remplaçant dans (*) :

$$\begin{aligned} E - F &= \frac{\frac{(a-b)^2}{ab} + 2 + \frac{(b-c)^2}{bc} + 2 + \frac{(c-a)^2}{ca} + 2 - 6}{3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca}}{3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}$$

Puis on montre facilement que ce quotient est positif ou nul.

Conclusion :

$E - F \geq 0$, autrement dit $E \geq F$.

• autre méthode

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = x + \frac{1}{x}$, alors :

$$E - F = \frac{f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{b}{c}\right) + f\left(\frac{c}{a}\right) - 6}{3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}$$

Or,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)$ est du signe de $x - 1$, donc négatif sur $]0; 1[$ et positif sur $[1; +\infty[$ par conséquent f admet pour minimum $f(1)$ sur $]0; +\infty[$.

Or, $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ donc $\forall x > 0, f(x) \geq 2$, d'où :

$$f\left(\frac{a}{b}\right) \geq 2, f\left(\frac{b}{c}\right) \geq 2 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{c}{a}\right) \geq 2$$

donc : $f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{b}{c}\right) + f\left(\frac{c}{a}\right) \geq 6$ i.e. : $f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{b}{c}\right) + f\left(\frac{c}{a}\right) - 6 \geq 0$

et comme le dénominateur de (*) est strictement positif on en déduit :

$$\frac{f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{b}{c}\right) + f\left(\frac{c}{a}\right) - 6}{3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \geq 0$$

Conclusion :

$E - F \geq 0$, autrement dit $E \geq F$.

Complément :

$$E = F \Leftrightarrow (a-b)^2 = (b-c)^2 = (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$$

Défi 02 x et y sont deux réels strictement positifs vérifiant $xy = 1$, on pose :

$$E(x, y) = \frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x}$$

Pour quel(s) couple(s) (x, y) l'expression $E(x, y)$ est-elle minimale et que vaut cette valeur minimale ?

Corrigé

Soient x et y deux réels strictement positifs tels que $xy = 1$,

on a : $y = \frac{1}{x}$, puis :

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} &= \frac{x}{1+\frac{1}{x}} + \frac{\frac{1}{x}}{1+x} = \frac{x}{\frac{x+1}{x}} + \frac{\frac{1}{x}}{1+x} = \frac{x^2}{x+1} + \frac{\frac{1}{x}}{x+1} \\ &= \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x+1} = \frac{\frac{x^3 + 1}{x}}{x+1} = \frac{x^3 + 1}{x} \times \frac{1}{x+1} = \frac{x^3 + 1}{x(x+1)} = \frac{x^3 - (-1)^3}{x(x+1)} \end{aligned}$$

Or, $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$, on a : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ donc la dernière expression est égale à :

$$\frac{(x - (-1))(x^2 + x(-1) + (-1)^2)}{x(x+1)} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \frac{x^2 - x + 1}{x}$$

Pour tout $x > 0$, on pose :

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x) - 1(x^2 - x + 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - x - x^2 + x - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

Comme $x+1 > 0$ et $x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$, on en déduit que $f'(x) < 0$ sur $]0; 1[$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$ donc f est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Or :

$$f(1) = \frac{1^2 - 1 + 1}{1} = 1$$

donc $f(x)$ atteint sa valeur minimale 1 en $x = 1$ (seulement),

et on a alors : $y = \frac{1}{1} = 1$.

La valeur minimale de $E(x, y)$ avec $x > 0$, $y > 0$ et $xy = 1$ est 1, elle est atteinte pour $(x, y) = (1, 1)$.

Défi 03 x et y sont deux réels et on pose :

$$E(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 10$$

Quelle est la valeur minimale de $E(x, y)$ et pour quel(s) couple(s) est-elle atteinte ?

Corrigé (défi trouvé par **Ouliana M.**)

Pour tous réels x et y , on a :

$$\begin{aligned} E(x, y) &= x^2 + y^2 - 2x - 4y + 10 \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 4y + 10 \\ &= (x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + 10 \\ &= (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 5 \end{aligned}$$

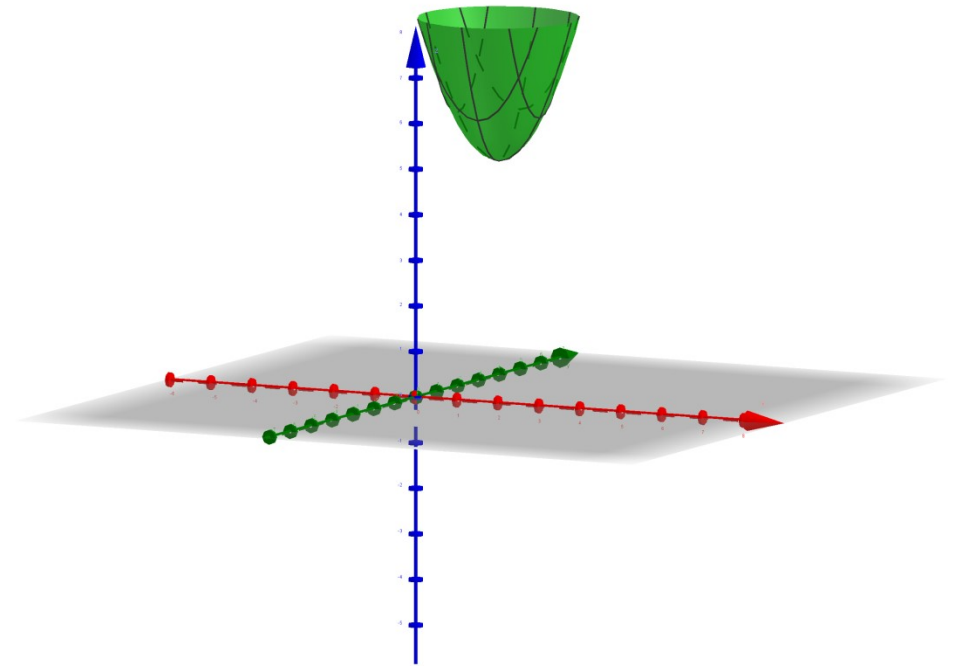
Or : $(x - 1)^2 \geq 0$ et $(y - 2)^2 \geq 0$, donc : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$,
puis : $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 5 \geq 5$ autrement dit : $E(x, y) \geq 5$.

De plus :

$$\begin{aligned} E(x, y) = 5 &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 5 = 5 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (1, 2) \end{aligned}$$

Conclusion

La valeur minimale de $E(x, y)$ est 5, atteinte pour le couple : (1,2).



Défi 04 [grand classique]

x, y et z sont des réels strictement positifs tels que $xyz = 1$,
calculer :

$$\frac{x}{xy + x + 1} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{z}{zx + z + 1}$$

Corrigé (défi trouvé par **Loïc P.**)

Pour x, y et z réels strictement positifs tels que $xyz = 1$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{x}{xy + x + 1} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{z}{zx + z + 1} \\ &= \frac{x}{xy + x + 1} + \frac{y \times x}{(yz + y + 1) \times x} + \frac{z \times xy}{(zx + z + 1) \times xy} \\ &= \frac{x}{xy + x + 1} + \frac{xy}{xyz + xy + x} + \frac{xyz}{xyzx + xyz + xy} \\ &= \frac{x}{xy + x + 1} + \frac{xy}{1 + xy + x} + \frac{1}{1x + 1 + xy} \\ &= \frac{x}{xy + x + 1} + \frac{xy}{xy + x + 1} + \frac{1}{xy + x + 1} \\ &= \frac{x + xy + 1}{xy + x + 1} \\ &= \frac{xy + x + 1}{xy + x + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Résumons :

$$\frac{x}{xy + x + 1} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{z}{zx + z + 1} = 1$$

Défi 05 On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé de la fonction inverse f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

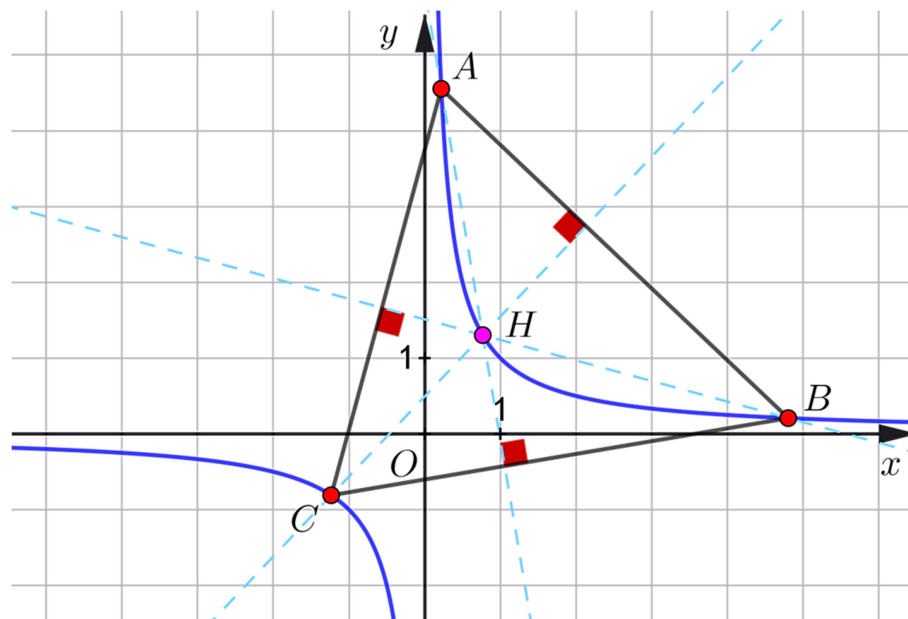
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

On se donne trois réels non nuls deux à deux distincts a, b et c , on note respectivement A, B et C les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a, b et c , ainsi :

$$A\left(a; \frac{1}{a}\right), B\left(b; \frac{1}{b}\right) \text{ et } C\left(c; \frac{1}{c}\right)$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. L'orthocentre H du triangle ABC appartient-il toujours à $\mathcal{C}$?
Si oui le démontrer, sinon trouver un contre-exemple.

Figure illustrative :



Remarque : la courbe de f est un exemple d'hyperbole.

Corrigé proposé par **le prof**

1. On a les équivalences : A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$. Or, $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ \frac{a - b}{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ \frac{b - a}{ab} \end{pmatrix}$$

et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} c - a \\ \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - a \\ \frac{a - c}{ac} \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \begin{vmatrix} b - a & c - a \\ \frac{a - b}{ab} & \frac{a - c}{ac} \end{vmatrix} \\ &= (b - a) \times \frac{a - c}{ac} - (c - a) \times \frac{a - b}{ab} \\ &= \frac{(b - a)(a - c)}{ac} - \frac{(c - a)(a - b)}{ab} \\ &= \frac{(b - a)(a - c)}{ac} - \frac{(a - c)(b - a)}{ab} \\ &= \frac{(b - a)(a - c)b}{abc} - \frac{(a - c)(b - a)c}{abc} \\ &= \frac{(b - a)(a - c)(b - c)}{abc} \\ &= \frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{abc} \end{aligned}$$

Or, $a - b \neq 0$, $b - c \neq 0$ et $c - a \neq 0$,

donc $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$ par conséquent : $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 0$

Conclusion : les points **A, B et C** ne sont pas alignés.

2. • Notons h_A la hauteur issue de A du triangle ABC

$\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal à h_A et $A \in h_A$ donc, pour tout $M(x; y)$ du plan on a l'équivalence :

$$M \in h_A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow x_{\overrightarrow{AM}}x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{AM}}y_{\overrightarrow{BC}} = 0$$

Or, $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - a \\ y - \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} c - b \\ \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \end{pmatrix}$ donc $M(x; y) \in h_A$ ssi :

$$(x - a)(c - b) + \left(y - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(c - b) + \frac{c - b}{bc}\left(y - \frac{1}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{1}{a} = \frac{(x - a)(b - c)bc}{c - b}$$

$$\Leftrightarrow y = bc(x - a) + \frac{1}{a}$$

Par permutation circulaire, l'équation réduite de la hauteur h_B issue de B du triangle ABC est : $y = ca(x - b) + \frac{1}{b}$.

Le couple coordonnées de H est donc le couple solution du système d'inconnue (x, y) :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = bc(x - a) + \frac{1}{a} \\ y = ca(x - b) + \frac{1}{b} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = bc(x - a) + \frac{1}{a} \\ bc(x - a) + \frac{1}{a} = ca(x - b) + \frac{1}{b} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = bc(x - a) + \frac{1}{a} \\ bc(x - a) - ca(x - b) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = bc(x - a) + \frac{1}{a} \\ (bc - ca)x - abc + abc = \frac{a - b}{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = bc(x - a) + \frac{1}{a} \\ c(b - a)x = \frac{a - b}{ab} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = bc(x - a) + \frac{1}{a} \\ (b - a)x = \frac{a - b}{abc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = bc(x - a) + \frac{1}{a} \\ x = \frac{a - b}{abc(b - a)} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = bc(x - a) + \frac{1}{a} \\ x = -\frac{1}{abc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = bc\left(-\frac{1}{abc} - a\right) + \frac{1}{a} \\ x = -\frac{1}{abc} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{a} - abc + \frac{1}{a} \\ x = -\frac{1}{abc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -abc \\ x = -\frac{1}{abc} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc :

$$H\left(-\frac{1}{abc}; -abc\right)$$

D'où :

$$\frac{1}{x_H} = \frac{1}{-\frac{1}{abc}} = -\frac{1}{\frac{1}{abc}} = -abc = y_H$$

On constate que $y_h = \frac{1}{x_H}$ donc $H \in \mathcal{C}$.

Conclusion :

L'orthocentre H du triangle ABC appartient toujours à $\mathcal{C}$.

Défi 06 On considère l'équation (E) :

$$e^{2x} + (1 - 2m)e^x + m^2 - m = 0$$

d'inconnue réelle x où m est un paramètre réel.

Discuter, suivant les valeurs de m , de l'existence et du nombre de solution(s) de (E).

Corrigé (défi trouvé par **Ouliana M.**)

L'équation (E) s'écrit aussi : $(e^x)^2 + (1 - 2m)e^x + m^2 - m = 0$
puis en posant $X = e^x$: $X^2 + (1 - 2m)X + m^2 - m = 0$.

$X^2 + (1 - 2m)X + m^2 - m$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 1$,
 $b = 1 - 2m$ et $c = m^2 - m$, de discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta_m &= (1 - 2m)^2 - 4(1)(m^2 - m) \\
&= 1 - 4m + 4m^2 - 4m^2 + 4m = 1
\end{aligned}$$

$\Delta_m > 0$ donc $X^2 + (1 - 2m)X + m^2 - m$ admet deux racines réelles distinctes :

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta_m}}{2a} = \frac{-(1 - 2m) - 1}{2(1)} = \frac{-2 + 2m}{2} = m - 1 \\
X_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta_m}}{2a} = \frac{-(1 - 2m) + 1}{2(1)} = \frac{-1 + 2m + 1}{2} = m
\end{aligned}$$

Or, $X = e^x$, donc : $e^x = m$ ou $e^x = m - 1$.

Procédons par disjonction de cas :

- si $m \leq 0$, alors $e^x = m$ est impossible et $m - 1 < -1 < 0$ donc $e^x = m - 1$ n'a pas de solution, par conséquent (E) n'a pas de solution

- si $0 < m \leq 1$, alors :

- d'une part : $e^x = m \Leftrightarrow e^x = e^{\ln(m)} \Leftrightarrow x = \ln(m)$

- d'autre part : $m - 1 \leq 0$ donc $e^x = m - 1$ n'a pas de solution,

Résumons : (E) admet une unique solution : $\ln(m)$.

- si $m > 1$, alors :

- d'une part : $e^x = m \Leftrightarrow e^x = e^{\ln(m)} \Leftrightarrow x = \ln(m)$

- d'autre part : $m - 1 > 0$ donc $e^x = m - 1 \Leftrightarrow e^x = e^{\ln(m-1)} \Leftrightarrow x = \ln(m - 1)$

Finalement l'équation (E) admet deux solutions distinctes : $\ln(m)$ et $\ln(m - 1)$.

Bilan

- si $m \leq 0$: aucune solution dans $\mathbb{R}$
- si $0 < m \leq 1$: une unique solution ($\ln(m)$)
- si $m > 1$: deux solutions réelles distinctes, ($\ln(m)$ et $\ln(m - 1)$)

Défi 07 Soient a et b deux constantes réelles, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = a - b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = (a + b)u_{n+1} - abu_n$$

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Emettre une conjecture sur la forme explicite de u_n , $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer cette conjecture.

Corrigé

$$u_0 = 0, u_1 = a - b, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (a + b)u_{n+1} - abu_n.$$

1. $u_2 = (a + b)u_1 - abu_0 = (a + b)(a - b) - ab(0) = a^2 - b^2$
 $u_3 = (a + b)u_2 - abu_1 = (a + b)(a^2 - b^2) - ab(a - b)$
 $= a^3 - ab^2 + a^2b - b^3 - a^2b + ab^2 = a^3 - b^3$

Résumons :

$$\begin{aligned} u_2 &= a^2 - b^2 \\ u_3 &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

2. Remarquons que :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 = 1 - 1 = a^0 - b^0 \\ u_1 &= a - b = a^1 - b^1 \\ u_2 &= a^2 - b^2 \\ u_3 &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

Conjecture : « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n - b^n$ ».

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la proposition : « $\begin{cases} u_n = a^n - b^n \\ u_{n+1} = a^{n+1} - b^{n+1} \end{cases}$ ».

- initialisation

D'une part : $a^0 - b^0 = 1 - 1 = 0$, or $u_0 = 0$ donc $u_0 = a^0 - b^0$
et d'autre part : $a^1 - b^1 = a - b = u_1$.

On a donc : $\begin{cases} u_0 = a^0 - b^0 \\ u_1 = a^1 - b^1 \end{cases}$ autrement dit P_0 est vraie.

- hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est vraie, c'est-à-dire tel que :

$$\begin{cases} u_k = a^k - b^k \\ u_{k+1} = a^{k+1} - b^{k+1} \end{cases}$$

et montrons que P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} u_{k+1} = a^{k+1} - b^{k+1} \\ u_{k+2} = a^{k+2} - b^{k+2} \end{cases}$$

L'égalité $u_{k+1} = a^{k+1} - b^{k+1}$ est assurée par l'hypothèse de récurrence donc il suffit de montrer que : $u_{k+2} = a^{k+2} - b^{k+2}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{k+2} &= (a + b)u_{k+1} - abu_k \\ &= (a + b)(a^{k+1} - b^{k+1}) - ab(a^k - b^k) \\ &= a^{k+2} - ab^{k+1} + ba^{k+1} - b^{k+2} - a^{k+1}b + ab^{k+1} \\ &= a^{k+2} - b^{k+2} \end{aligned}$$

Résumons : $u_{k+2} = a^{k+2} - b^{k+2}$.

On a :

$$\begin{cases} u_{k+1} = a^{k+1} - b^{k+1} \\ u_{k+2} = a^{k+2} - b^{k+2} \end{cases}$$

autrement dit P_{k+1} est vraie.

Conclusion :

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n - b^n$.

Défi 08 On pose : $A = 2025^{2026}$ et $B = 2026^{2025}$.

Cocher la bonne réponse :

☐ $A < B$ ☐ $A = B$ ☐ $A > B$

Corrigé (défi trouvé par **Ouliana M.**)

Recherche :

$$\ln(A) = \ln(2025^{2026}) = 2026 \times \ln(2025)$$

$$\ln(B) = \ln(2026^{2025}) = 2025 \times \ln(2026)$$

Comparer : $\frac{\ln(2025)}{2025}$ et $\frac{\ln(2026)}{2026}$ permettrait, en multipliant chaque membre par 2025×2026 , de comparer $\ln(A)$ et $\ln(B)$...

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\text{Rappel : } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $1 - \ln(x)$.

Pour $x > 0$ on a les équivalences :

$$1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln(x) \Leftrightarrow \ln(e) > \ln(x) \Leftrightarrow e > x \Leftrightarrow x < e$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $[e; +\infty[$.

Or, $2025 < 2026$ avec 2025 et 2026 appartenant à l'intervalle $[e; +\infty[$ sur lequel f est strictement décroissante donc inverse strictement le sens des relations d'ordre, par conséquent : $f(2025) > f(2026)$,

autrement dit :

$$\frac{\ln(2025)}{2025} > \frac{\ln(2026)}{2026}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2025)}{2025} \times 2025 \times 2026 > \frac{\ln(2026)}{2026} \times 2025 \times 2026$$

$$\Leftrightarrow 2026 \ln(2025) > 2025 \ln(2026)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2025^{2026}) > \ln(2026^{2025})$$

$$\Leftrightarrow 2025^{2026} > 2026^{2025}$$

On a donc : $A > B$, c'est la case correspondante qu'il convient de cocher.

Complément

1	2025^{2026} $\approx 6.56 \cdot 10^{6698}$
2	2026^{2025} $\approx 8.81 \cdot 10^{6695}$

... ce qui est en accord avec $A > B$.

Défi 09 [grand classique]

On pose :

$$A = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=1}^{100} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

1. Calcul de A**a.** Déterminer deux constantes a et b telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}, \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$

b. Calculer A .**2. Calculer B.****Corrigé** (défi trouvé par **Laura F.C.**)**1. a.** Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$, on a :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

donc $a = 1$ et $b = 1$ convient, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}, \quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

b. On a :

$$A = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k+1}$$

Or, en posant $k+1 = j$:lorsque $k = 1, j = 2$ et lorsque $k = 100, j = 101$,

donc :

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^{101} \frac{1}{j} = \sum_{k=2}^{101} \frac{1}{k}$$

Donc :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{101} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{100} \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=2}^{100} \frac{1}{k} + \frac{1}{101} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{100} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{100} \frac{1}{k} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{101-1}{101} = \frac{100}{101} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$A = \frac{100}{101}$$

Avec GeoGebra :

1	Somme(1/(k(k+1)), k, 1, 100)
→	$\frac{100}{101}$

2. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} &\frac{2}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+2}{k(k+1)(k+2)} - \frac{k}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

Or, en posant $k + 1 = j$, on a : $k + 2 = j + 1$,
lorsque $k = 1, j = 2$ et lorsque $k = 100, j = 101$
donc :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
 &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{j=2}^{101} \frac{1}{j(j+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} - \left(\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j(j+1)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{101 \times 102} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{j(j+1)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{101 \times 102} \\
 &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{101 \times 102} \\
 &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{101 \times 102 - 2}{2 \times 101 \times 102} \\
 &= \frac{2\,575}{5\,151}
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$B = \frac{2\,575}{5\,151}$$

Avec GeoGebra :

1	Somme(2/(k(k+1)(k+2)), k, 1, 100)
	→ $\frac{2575}{5151}$

Défi 10 [grand classique]

- montrer que, pour tous réels x et y : $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
- en déduire que, pour tous réels a, b et c positifs ou nuls :

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$$

Corrigé (défi trouvé par **Laura F.C.**)

- soient x et y des réels, le carré d'un réel étant toujours positif ou nul on a :

$$(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 2xy$.

- Soient a, b et c trois réels positifs ou nul, l'inégalité précédente donne, en posant $x = \sqrt{a}$ et $y = \sqrt{b}$:

$$(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{a}\sqrt{b} \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{a}\sqrt{b} (*)$$

Par permutation circulaire, on obtient :

$$b + c \geq 2\sqrt{b}\sqrt{c} (**) \text{ et } c + a \geq 2\sqrt{c}\sqrt{a} (***)$$

On a déduit de (*), (**) et (***) que :

$$\begin{aligned}
 (a + b) \times (b + c) \times (c + a) &\geq 2\sqrt{a}\sqrt{b} \times 2\sqrt{b}\sqrt{c} \times 2\sqrt{c}\sqrt{a} \\
 &\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2(\sqrt{c})^2 \\
 &\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc
 \end{aligned}$$

Défi 11 [grand classique]

Démontrer par récurrence la formule du binôme de Newton :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Corrigé (défi trouvé par **Loïc P.**)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_n :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

• initialisation

D'une part, $(a + b)^0 = 1$, et d'autre part :

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$\text{donc : } (a + b)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k \text{ autrement dit } P_0 \text{ est vraie.}$$

• hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

On a :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = a(a + b)^n + b(a + b)^n \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} (*) \end{aligned}$$

En posant $k + 1 = j$, qui donne $k = j - 1$:

$$n - k = n - (j - 1) = n - j + 1 = n + 1 - j$$

lorsque $k = 0, j = 1$ et lorsque $k = n, j = n + 1$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j$$

donc (*) devient :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\ &\quad + \binom{n}{n+1-1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \right) + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} (**) \end{aligned}$$

Or, d'après la formule du triangle de Pascal on a :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

donc (**) devient :

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$+ \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Résumons :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Défi 12 Dédurre de la formule du binôme de Newton que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Corrigé (défi trouvé par **Esteban E.**)

Pour tout a et b réels, la formule du binôme de Newton s'écrit :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Pour $a = b = 1$, on obtient :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times 1 \times 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Défi 13 Dédurre de la formule du binôme de Newton que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Corrigé (défi trouvé par **Esteban E.**)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule du binôme de Newton on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Pour $a = 1$ et $b = -1$ on obtient :

$$(1+(-1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times 1 (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

Or, $(1+(-1))^n = 0^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Défi 14 Dédurre de la formule du binôme de Newton que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

Corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^n$.

D'une part, en utilisant la formule $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ on obtient :

$$f'(x) = n \times 1 \times (1+x)^{n-1} = n(1+x)^{n-1}$$

D'autre part, la formule du binôme de Newton donne :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

autrement dit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

par conséquent :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

En comparant les deux écriture obtenues pour $f'(x)$ on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$

Pour $x = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k 1^{k-1} &= n(1+1)^{n-1} \\ \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k &= n2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$$

Autre solution proposée par **Loïc C**

Lemme lorsque les expressions existent, on a : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$$

En posant $k-1 = j$, qui donne $k = j+1$,

si $k = 1$, $j = 0$ et si $k = n$, $j = n-1$ donc :

$$n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$$

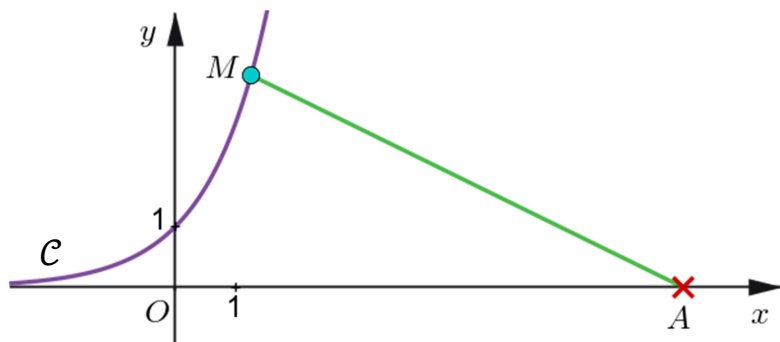
□ Preuve du Lemme :

$$\begin{aligned} n \binom{n-1}{k-1} &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = k \times \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} \\ &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

On a bien : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ □

Défi 15 Minimiser une distance

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ dans un repère orthonormé du plan :



Soit $A(e^2 + 1; 0)$ et $M(x; e^x)$ un point variable de $\mathcal{C}$: pour quelle position de M la distance AM est-elle minimale, ou ce qui revient au même, le carré de cette distance est-il minimal et que vaut cette distance minimale ?

Corrigé (défi trouvé par **Matthieu C.**)

On est dans un repère orthonormé donc on peut appliquer la formule de la distance, pour tout $M(x; e^x) \in \mathcal{C}$ on a :

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$$

$$AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2$$

$$AM^2 = (x - (e^2 + 1))^2 + (e^x - 0)^2$$

$$AM^2 = x^2 - 2(e^2 + 1)x + (e^2 + 1)^2 + e^{2x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^2 - 2(e^2 + 1)x + (e^2 + 1)^2 + e^{2x}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = 2x - 2(e^2 + 1) + 2e^{2x}$$

$f''(x) = 2 + 4e^{2x} > 0$ donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Or, } f'(1) = 2(1) - 2(e^2 + 1) + 2e^{2(1)} = 2 - 2e^2 - 2 + 2e^2 = 0$$

donc : si $x < 1$, $f'(x) < 0$ et si $x > 1$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur $] -\infty; 1]$ et est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc atteint un minimum absolu en $x = 1$.
Or,

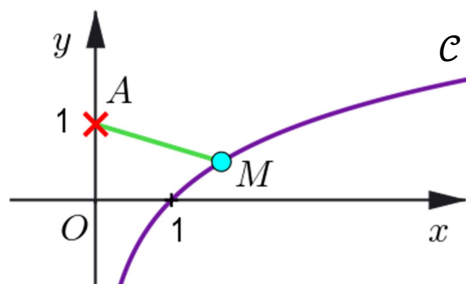
$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 - 2(e^2 + 1) \times 1 + (e^2 + 1)^2 + e^{2(1)} \\ &= 1 - 2e^2 - 2 + e^4 + 2e^2 + 1 + e^2 = e^4 + e^2 \end{aligned}$$

Conclusion :

la valeur minimale de AM est $\sqrt{e^4 + e^2}$, atteinte pour $M(1; e)$.

Défi 16 Minimiser une distance

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$ dans un repère orthonormé du plan :



On considère $A(0; 1)$ et on note $M(x; \ln(x))$ un point variable de $\mathcal{C}$: pour quelle position de M la distance AM est-elle minimale, ou, ce qui revient au même, le carré de cette distance est-il minimal ?

Corrigé

On est dans un repère orthonormé donc on peut appliquer la formule de la distance, pour tout $M(x; \ln(x)) \in \mathcal{C}$ on a :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} \\ AM^2 &= (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 \\ AM^2 &= (x - 0)^2 + (\ln(x) - 1)^2 \\ AM^2 &= x^2 + (\ln(x))^2 - 2 \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = x^2 + (\ln(x))^2 - 2 \ln(x) + 1$.

$$\text{Rappel : } (u^2)' = 2u \times u' \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x + 2 \ln(x) \times \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x} + 0$$

$$f'(x) = 2x + \frac{2 \ln(x)}{x} - \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{2 \ln(x)}{x} - \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2 \ln(x) - 2}{x}$$

Pour $x > 0$, posons $g(x) = 2x^2 + 2 \ln(x) - 2$.

$$g'(x) = 2 \times 2x + 2 \times \frac{1}{x} - 0$$

$$g'(x) = 4x + \frac{2}{x}$$

Pour tout $x > 0$, $4x > 0$ et $\frac{2}{x} > 0$ donc $g'(x) > 0$ par conséquent g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\text{Or, } g(1) = 2(1)^2 + 2 \ln(1) - 2 = 2 + 2 \times 0 - 2 = 0.$$

En utilisant la stricte croissance de g sur $]0; +\infty[$ on en déduit que :

- sur $]0; 1[$, $g'(x) < 0$ donc $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]0; 1[$
- sur $]1; +\infty[$, $g'(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante, on en déduit que f admet un minimum global en 1 (uniquement).

Or,

$$f(1) = 1^2 + (\ln(1))^2 - 2 \ln(1) + 1 = 1 + 0^2 - 2 \times 0 + 1 = 2$$

Le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 a pour ordonnée : $\ln(1) = 0$.

Résumons :

La distance AM , $M \in \mathcal{C}$, est minimale lorsque M est en $B(1; 0)$, cette distance minimale est $\sqrt{2}$.