D01 Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, 8^n - 5^n$ est un multiple de 3.

Corrigé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition P_n: « $8^n - 5^n$est un multiple de 3 ».

• initialisation

Vérifions que P_0 : « $8^0 - 5^0$ est un multiple de 3 » est vraie.
On a : $8^0 - 5^0 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 3$ donc $8^0 - 5^0$ est un multiple de 3 : P_0 est donc vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $8^k - 5^k$ est un multiple de 3 » est vraie (hypothèse de récurrence)
Démontrons que P_{k+1} : « $8^{k+1} - 5^{k+1}$ est un multiple de 3 » est vraie.
On a : $8^k - 5^k$ est un multiple de 3 $(H.R.)$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $8^k - 5^k = 3\alpha$, d'où $8^k = 3\alpha + 5^k$.
On a :

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 5^{k+1} &= 8 \times 8^k - 5 \times 5^k = 8(3\alpha + 5^k) - 5 \times 5^k \\ &= 24\alpha + 8 \times 5^k - 5 \times 5^k = 24\alpha + 3 \times 5^k = 3(8\alpha + 5^k) \end{aligned}$$

Il existe $\alpha' \in \mathbb{Z}$ tel que $8^{k+1} - 5^{k+1} = 3\alpha'$, à savoir $\alpha' = 8\alpha + 5^k$, donc $8^{k+1} - 5^{k+1}$ est un multiple de 3, autrement dit P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, P_n est vraie, autrement dit :
$\forall n \in \mathbb{N}, 8^n - 5^n$ est un multiple de 3.

D02 Déterminer le sens de variation de (u_n) définie par et $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{(u_n)^2 + 1}$$

Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$u(x) = x^2$ $\quad u'(x) = 2x$
$v(x) = x^2 + 1$ $\quad v'(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur $2x$, par conséquent f est croissante (strictement) sur $[0; +\infty[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_n : « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ »

• initialisation

Montrons que P_0 : « $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$ » est vraie.

On a : $u_1 = \frac{u_0^2}{u_0^2 + 1} = \frac{1^2}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$ et $u_0 = 2$

On a donc $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$ autrement dit P_0 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$ » est vraie $(H.R.)$, démontrons que P_{k+1} : « $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$ » est vraie. On a : $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$ $(H.R.)$
Comme f est croissante sur $[0; +\infty[$, elle conserve le sens de la relation d'ordre sur cet intervalle, on en déduit : $f(0) \leqslant f(u_k + 1) \leqslant f(u_k)$ c'est-à-dire :

$$\frac{0^2}{0^2+1} \leqslant u_{(k+1)+1} \leqslant u_k + 1$$

$$0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$$

Par conséquent P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
On en déduit en particulier que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) **est décroissante**.

D03 Soit $(\boldsymbol{u_n})$ telle que $\boldsymbol{u_0 = 1}$ et $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_{n+1} = u_n + 2n + 1}$.
Démontrer que : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n = n^2 + 1}$.

Corrigé
Pour tout entier naturel n, on considère la proposition P_n: « $u_n = n^2 + 1$ ».

• initialisation
Vérifions que P_0 : « $u_0 = 0^2 + 1$ » est vraie.
$u_0 = 1 = 0 + 1 = 0^2 + 1$ donc P_0 est vraie.

• hérédité
soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $u_k = k^2 + 1$ » est vraie (hypothèse de récurrence)
démontrons que P_{k+1} : « $u_{k+1} = (k+1)^2 + 1$ » est vraie.
$u_k = k^2 + 1\ (H.R.)$
En ajoutant $2k + 1$ à chaque membre, on obtient :
$$\underbrace{u_k + 2k + 1}_{u_{k+1}} = \underbrace{k^2 + 1 + 2k + 1}_{= k^2 + 2k + 1 + 1}$$
Or, $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ donc :
$u_{k+1} = (k+1)^2 + 1$, autrement dit : P_{k+1} est vraie.

Conclusion
Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie autrement dit :
$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n = n^2 + 1}$

D04 On considère la suite $(\boldsymbol{u_n})$ définie par : $\boldsymbol{u_0 = 2}$ et pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$,
$\boldsymbol{u_{n+1} = \sqrt{u_n + 7}}$. Démontrer que : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4}$.
En déduire le sens de variation de $(\boldsymbol{u_n})$.

Corrigé
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition P_n : « $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ ».

• initialisation
On a : $u_1 = \sqrt{2 + 7} = \sqrt{9} = 3$.
Comme $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$ on en déduit que P_0 est vraie.

• hérédité
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $2 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$ » est vraie (hypothèse de récurrence) et montrons que P_{k+1} : « $2 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$ » est vraie.
On a :
$2 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$ (H.R) donc en ajoutant 7 à chaque membre :
$9 \leqslant u_k + 7 \leqslant u_{k+1} + 7 \leqslant 4 + 7$
$9 \leqslant u_k + 7 \leqslant u_{k+1} + 7 \leqslant 11$
La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$ donc :
$\sqrt{9} \leqslant \sqrt{u_k + 7} \leqslant \sqrt{u_{k+1} + 7} \leqslant \sqrt{11}$
puis en remarquant que $\sqrt{9} = 3$ et $\sqrt{11} \approx 3{,}3$, on obtient :
$2 \leqslant 3 \leqslant \sqrt{u_k + 7} \leqslant \sqrt{u_{k+1} + 7} \leqslant \sqrt{11} \leqslant 4$
$\Rightarrow 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 4$ donc P_{k+1} est vraie

Conclusion
Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante.

D05 Démontrer par récurrence que :
$$\boldsymbol{1^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

Corrigé
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition
$$P_n \ : « 1^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} »$$

• initialisation
On a d'une part : $1^3 = 1$ et d'autre part : $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1$ donc P_1 est vraie.

• hérédité
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : «$1^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$» (hypothèse de récurrence).
Démontrons que P_{k+1} : «$1^3 + \cdots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$» est vraie.
On a : $1^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$
donc :
$$1^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^2(k+1)}{4}$$
$$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

Or, $(k+2)^2 = k^2 + 4k + 4$ donc :

$$1^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

autrement dit P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, 1^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

D06 Un élève obtient avec ChatGPT :

> Donne sans aucun commentaire une formule pour la somme :
> 1/(1*2)+1/(2*3)+...+1/(n*(n+1))

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

C'est-à-dire que :

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Si cette affirmation est juste, la démontrer, sinon trouver un contre-exemple.

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on considère la proposition P_n :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

• initialisation

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\times(1+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$$

donc P_1 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence), montrons que P_{k+1} :

$$« \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+2} »$$

est vraie.

On a :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{k+1} \quad (H.R.)$$

On a :

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)}$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)\big((k+1)+1\big)}$$
$$= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad (en\ utilisant\ l'H.R.)$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$
$$= 1 - \left(\frac{1\times(k+2)}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$
$$= 1 - \frac{k+2-1}{(k+1)(k+2)}$$
$$= 1 - \frac{k+1}{(k+1)(k+2)}$$
$$= 1 - \frac{1}{k+2}$$

On a donc :

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{k+2}$$

donc P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, P_n est vraie autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

L'affirmation de ChatGPT est donc vraie.

D07 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

En revenant à la définition d'une limite montrer que la suite (u_n) converge vers 2.

Corrigé

☐ Recherche

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$?

$$|u_n - 2| = \left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n+3}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{2n+3-2(n+1)}{n+1}\right|$$

$$= \left|\frac{2n+3-2n-2}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

$$0 < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

☐☐

Notons n_0 le premier entier naturel strictement plus grand que $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, on a :

$$n \geqslant n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

On a :

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

$n+1$ et $\frac{1}{\varepsilon}$ sont non nuls et de même signes donc leurs inverses sont rangés dans l'ordre inverse :

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

et comme $\frac{1}{n+1} \geqslant 0$, on a : $\left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$ donc l'inégalité précédente s'écrit :

$$\left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$|u_n - 2| < \varepsilon$$

On a donc :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ (n_0 est le premier entier naturel strictement plus grand que $\frac{1}{\varepsilon} - 1$) tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$

Cela exprime que la suite (u_n) converge vers 2.

Remarque

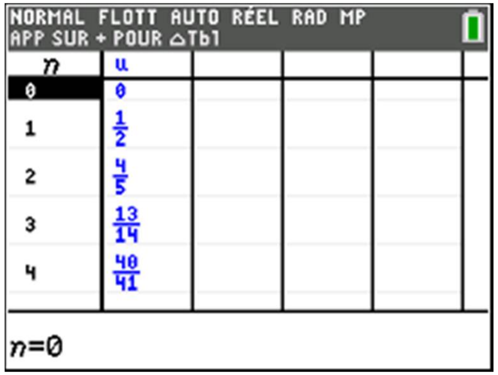
$\forall x \in \mathbb{R}$, on note $E(x)$ l'entier relatif vérifiant $E(x) \leqslant x < x+1$, on dit que $E(x)$ est la partie entière de x et que E est la fonction partie entière.

Dans notre exemple, on a : $n_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + 1$, qui, on pourrait le montrer, est un entier positif ou nul donc appartient bien à $\mathbb{N}$.

D08 [Exercice avec recherche]

On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$: conjecturer u_n en fonction de n puis démontrer par récurrence cette conjecture.

Corrigé



On obtient successivement :

$$u_0 = 0 = \frac{0}{1} = \frac{0 \times 2}{1 \times 2} = \frac{0}{2} = \frac{3^0 - 1}{3^0 + 1}$$

$$u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{2(0) + 1}{0 + 2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3^1 - 1}{3^1 + 1}$$

$$u_2 = \frac{2u_1 + 1}{u_1 + 2} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\right) + 1}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{3^2 - 1}{3^2 + 1}$$

$$u_3 = \frac{2u_2 + 1}{u_2 + 2} = \frac{2\left(\frac{4}{5}\right) + 1}{\frac{4}{5} + 2} = \frac{\frac{8}{5} + 1}{\frac{4}{5} + 2} = \frac{\frac{13}{5}}{\frac{14}{5}} = \frac{13}{5} \times \frac{5}{14} = \frac{13 \times 5}{5 \times 14} = \frac{13}{14}$$
$$= \frac{26}{28} = \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_n : « $u_n = \frac{3^n-1}{3^n+1}$ ».

• initialisation

$$\frac{3^0 - 1}{3^0 + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0 = u_0$$

P_0 est vraie

• hérédité

soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k est vraie (hypothèse de récurrence) et démontrons que P_{k+1} est vraie.

On a :

$$u_{k+1} = \frac{2u_k + 1}{u_k + 2} = \frac{2 \times \frac{3^k - 1}{3^k + 1} + 1}{\frac{3^k - 1}{3^k + 1} + 2} \quad \text{(en utilisant H.R.)}$$

$$= \frac{\frac{2(3^k - 1)}{3^k + 1} + \frac{3^k + 1}{3^k + 1}}{\frac{3^k - 1}{3^k + 1} + \frac{2(3^k + 1)}{3^k + 1}} = \frac{\frac{2 \times 3^k - 2 + 3^k + 1}{3^k + 1}}{\frac{3^k - 1 + 2 \times 3^k + 2}{3^k + 1}}$$

$$= \frac{3 \times 3^k - 1}{3 \times 3^k + 1} = \frac{3^{k+1} - 1}{3^{k+1} + 1}$$

On a donc :

$$u_{k+1} = \frac{3^{k+1} - 1}{3^{k+1} + 1}$$

par conséquent P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie autrement dit :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^n - 1}{3^n + 1}}$$

D09 **On pose $u_0 = 14$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,**

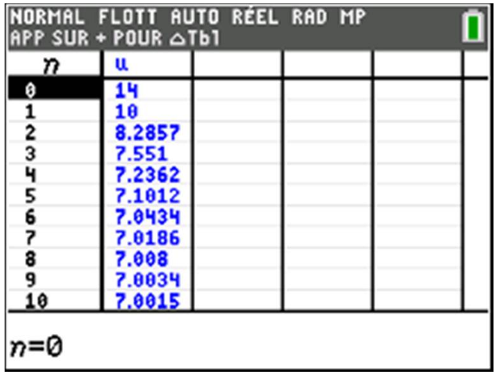
$$u_{n+1} = \frac{3}{7}u_n + 4$$

1. **Calculer u_1.**
2. **Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:**

$$7 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 14$$

3. **En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.**

Corrigé



NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

n	u
0	14
1	10
2	8.2857
3	7.551
4	7.2362
5	7.1012
6	7.0434
7	7.0186
8	7.008
9	7.0034
10	7.0015

n=0

1. On a :

$$u_1 = \frac{3}{7}u_0 + 4 = \frac{3}{7}(14) + 4 = 6 + 4 = 10$$

$$\boldsymbol{u_1 = 10}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition

$$P_n : « \ 7 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 14 \ »$$

• initialisation

$u_0 = 14$, $u_1 = 10$, donc : $7 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 14$: P_0 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $7 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 14$ » est vraie (hypothèse de récurrence),

Démontrons que P_{k+1} : «$7 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 14$ » est vraie.

On a : $7 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 14$ (H.R.), en multipliant par $\frac{3}{7} > 0$ on obtient :

$$\frac{3}{7} \times 7 \leqslant \frac{3}{7} \times u_{k+1} \leqslant \frac{3}{7} \times u_k \leqslant \frac{3}{7} \times 14$$

$$3 \leqslant \frac{3}{7}u_{k+1} \leqslant \frac{3}{7}u_k \leqslant 6$$

puis en ajoutant 4 :

$$3 + 4 \leqslant \frac{3}{7}u_{k+1} + 4 \leqslant \frac{3}{7}u_k + 4 \leqslant 6 + 4$$

$$7 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 10$$

Or $10 \leqslant 14$ donc $7 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 14$: P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, i.e. : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, 7 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 14}$.

3. On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, 7 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 14$ on en déduit que :
   • $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est décroissante
   • $\forall n \in \mathbb{N}, 7 \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 7
   On en déduit, d'après le théorème de convergence monotone, que la suite (u_n) est convergente.
   On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{N\to+\infty} u_N = \ell$.
   D'autre part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{7}u_n = \frac{3}{7}\ell$
   puis par limite d'une somme :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{7}u_n + 4\right) = \frac{3}{7}\ell + 4$$

par passage dans :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{7}u_n + 4$$

on obtient :

$$\ell = \frac{3}{7}\ell + 4 \Leftrightarrow \ell - \frac{3}{7}\ell = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{7}\ell = 4 \Leftrightarrow \ell = 4 \times \frac{7}{4} \Leftrightarrow \ell = 7$$

Conclusion : $\boldsymbol{\ell = 7}$.

D10 On se donne deux réels a et b, $a \neq 1$.
On considère la suite (u_n) de premier terme u_0 telle que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = au_n + b$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$$

• démontrer que (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison
• exprimer v_n en fonction de n, $n \in \mathbb{N}$
• en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$$

• on suppose que $a \in]-1;1[$, montre que (u_n) est convergente et préciser sa limite

$$u_0 a - \frac{ab}{1-a} + \frac{b}{1-a} = u_0 a - \frac{ab-b}{1-a} = u_0 a - \frac{b(a-1)}{1-a} = au_0 + b = u_1$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a}$$

$$= au_n + \frac{b-ab-b}{1-a} = au_n - \frac{ab}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = av_n$$

$$v_0 = u_0 - \frac{b}{1-a}$$

$$v_n = v_0 \times q^n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n$$

$$u_n = v_n + \frac{b}{1-a} = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$$

<u>Conclusion</u>

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$

• on suppose que $a \in]-1;1[$, montre que (u_n) est convergente et préciser sa limite

$a \in]-1;1[$, autrement dit $-1 < a < 1$, or si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ puis par limite d'un produit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n\right] = 0$$

puis par limite d'une somme :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}\right] = \frac{b}{1-a}$$

<u>Conclusion</u>

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$$

D11 **On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par leurs premiers termes respectifs $u_0 = 5$, $v_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel :**

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n$$

1. **Déterminer u_1 et v_1 puis u_2 et v_2.**
2. **Pour tout n entier naturel on pose :**

$$s_n = u_n + v_n \text{ et } d_n = u_n - v_n$$

   a. **Conjecturer l'expression de s_n, $n \in \mathbb{N}$, puis démontrer cette conjecture.**
   b. **Montrer que (d_n) est géométrique et préciser sa raison puis exprimer d_n en fonction de n.**
   c. **Déduire des questions précédentes u_n et v_n en fonction de n.**
   d. **Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite ℓ, à préciser.**

Corrigé

$u_0 = 5$, $v_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n$$

1. **Déterminer u_1 et v_1 puis u_2 et v_2.**

$$u_1 = \frac{4}{5}u_0 + \frac{1}{5}v_0 = \frac{4}{5}(5) + \frac{1}{5}(1) = \frac{20}{5} + \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{21}{5}}$$
$$v_1 = \frac{1}{5}u_0 + \frac{4}{5}v_1 = \frac{1}{5}(5) + \frac{4}{5}(1) = \frac{5}{5} + \frac{4}{5} = \mathbf{\frac{9}{5}}$$
$$u_2 = \frac{4}{5} \times \frac{21}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{84}{25} + \frac{9}{25} = \frac{84+9}{25} = \mathbf{\frac{93}{25}}$$
$$v_2 = \frac{1}{5} \times \frac{21}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{21}{25} + \frac{36}{25} = \mathbf{\frac{57}{25}}$$

2. **Pour tout n entier naturel on pose : $s_n = u_n + v_n$ et $d_n = u_n - v_n$.**

   a. **Conjecturer la nature de (s_n) puis la démontrer.**

$$s_0 = u_0 + v_0 = 5 + 1 = 6$$
$$s_1 = u_1 + v_1 = \frac{21}{5} + \frac{9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$
$$s_2 = u_2 + v_2 = \frac{93}{25} + \frac{57}{25} = \frac{150}{25} = \frac{25 \times 6}{25 \times 1} = 6$$

On constate que $s_0 = s_1 = s_2 = 6$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_n : « $s_n = 6$ ».

• initialisation
On a déjà obtenu $s_0 = 6$ donc P_0 est vraie.

• hérédité
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $s_k = 6$ » (hypothèse de récurrence) est vraie et démontrons que P_{k+1} : « $s_{k+1} = 6$ » est vraie.
On a :

$$s_{k+1} = u_{k+1} + v_{k+1} = \frac{4}{5}u_k + \frac{1}{5}v_k + \frac{1}{5}u_k + \frac{4}{5}v_k = u_k + v_k = s_k$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $s_k = 6$, donc on obtient $s_{k+1} = 6$ par conséquent P_{k+1} est vraie.

Conclusion
Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{s_n = 6}$.

   b. **Montrer que (d_n) est géométrique et préciser sa raison puis exprimer d_n en fonction de n.**

On a :

$$d_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n - \left(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n\right)$$
$$= \frac{4}{5}u_n - \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n - \frac{4}{5}v_n = \frac{3}{3}u_n - \frac{3}{5}v_n = \frac{3}{5}(u_n - v_n)$$
$$= \frac{3}{5}d_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = \frac{3}{5}d_n$ donc la suite (d_n) est géométrique de raison $\frac{3}{5}$, par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = d_0 \times q^n = 4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Résumons :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{d_n = 4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

c. Déduire des questions précédente u_n et v_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après ce qui précède :

$$\begin{cases} u_n + v_n = 6 \\ u_n - v_n = 4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n + v_n = 6 \\ 2v_n = 6 - 4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_n + v_n = 6 \\ v_n = 3 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = 6 - \left(3 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) \\ v_n = 3 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_n = 3 + 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ v_n = 3 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \begin{cases} \boldsymbol{u_n = 3 + 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n} \\ \boldsymbol{v_n = 3 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n} \end{cases}$$

d. Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite ℓ à préciser

$-1 < \frac{3}{5} < 1$, or, si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\boldsymbol{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{\boldsymbol{n}}\right) = 0$

Par limite d'une somme on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(3 + 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = 3$$

et par limite d'une différence :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(3 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = 3$$

<u>Conclusion</u>

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 3}$$

D12 **(u_n) est définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:**

$$\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{u_n + 12}{u_n + 2}}$$

Pour tout n entier naturel on pose :

$$\boldsymbol{v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 4}}$$

- **calculer u_1 et u_2 : la suite (u_n) est-elle monotone ?**
- **calculer v_0 sous forme de fraction irréductible**
- **montrer que (v_n) est géométrique, préciser sa raison**
- **exprimer v_n puis u_n en fonction de n (on admet que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 1$)**
- **déterminer la limite éventuelle de (u_n)**

<u>Corrigé</u>

$$\boldsymbol{u_0 = 6 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 12}{u_n + 2}, v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 4}}$$

- **calculer u_1 et u_2 : la suite (u_n) est-elle monotone ?**

$$u_1 = \frac{u_0 + 12}{u_0 + 2} = \frac{6 + 12}{6 + 2} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

$$u_2 = \frac{u_1 + 12}{u_1 + 2} = \cdots = \frac{57}{17}$$

$u_1 < u_0$ donc (u_n) n'est pas croissante

$u_2 > u_1$ donc (u_n) n'est pas décroissante

La suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante donc **(u_n) n'est pas monotone**

- **calculer v_0 sous forme de fraction irréductible**

$$v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 + 4} = \frac{6 - 3}{6 + 4} = \boldsymbol{\frac{3}{10}}$$

- **montrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 4} = \frac{\frac{u_n + 12}{u_n + 2} - 3}{\frac{u_n + 12}{u_n + 2} + 4} = \frac{\frac{u_n + 12}{u_n + 2} - \frac{3(u_n + 2)}{u_n + 2}}{\frac{u_n + 12}{u_n + 2} + \frac{4(u_n + 2)}{u_n + 2}}$$

$$= \frac{\frac{u_n + 12 - 3(u_n + 2)}{u_n + 2}}{\frac{u_n + 12 + 4(u_n + 2)}{u_n + 2}} = \frac{u_n + 12 - 3u_n - 6}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{u_n + 12 + 4u_n + 8}$$

$$= \frac{-2u_n + 6}{5u_n + 20} = \frac{-2(u_n - 3)}{5(u_n + 4)} = -\frac{2}{5} \times \frac{u_n - 3}{u_n + 4} = -\frac{2}{5} v_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+2} = -\frac{2}{5} v_n$ donc $(\boldsymbol{v_n})$ **est géométrique de raison** $\left(-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)$ **.**

• exprimer $\boldsymbol{v_n}$ puis $\boldsymbol{u_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(v_n) est géométrique donc $v_n = v_0 \times q^n$, or $v_0 = \frac{3}{10}$ et $q = -\frac{2}{5}$ donc

$$v_n = \frac{3}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n$$

Or,

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 4}$$
$$v_n(u_n + 4) = u_n - 3$$
$$u_n \times v_n + 4v_n = u_n - 3$$
$$u_n \times v_n - u_n = -3 - 4v_n$$
$$u_n(v_n - 1) = -3 - 4v_n$$
$$u_n = \frac{-3 - 4v_n}{v_n - 1}$$
$$u_n = \frac{3 + 4v_n}{1 - v_n} = \frac{3 + 4 \times \frac{3}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3 + \frac{6}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n}$$

Vérification Pour $n = 2$, cette formule donne :

$$u_2 = \frac{3 + \frac{12}{10} \times \frac{4}{25}}{1 - \frac{3}{10} \times \frac{4}{25}} = \frac{57}{17} \ (calculatrice)$$

• montrer que $(\boldsymbol{u_n})$ est convergente et préciser sa limite

$-1 < -\frac{2}{5} < 1$ or, si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n = 0$, par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{6}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

puis :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(3 + \frac{6}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n\right) = 3$$

De même, on montrerait que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n\right) = 1$$

donc par limite d'un quotient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3 + \frac{6}{5} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{10} \times \left(-\frac{2}{5}\right)^n} = 3$$

Finalement :

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = 3}$$

.

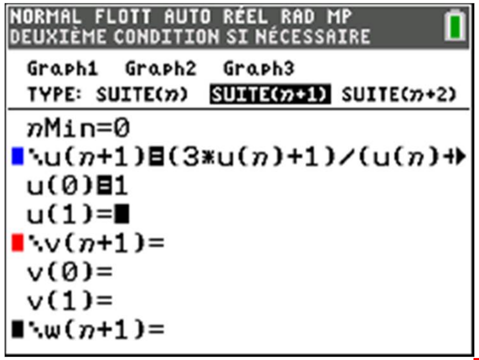
.

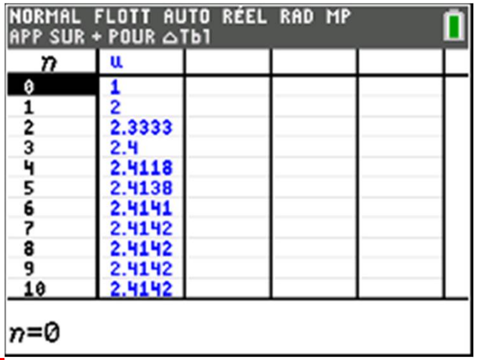
D13 **On pose $u_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel :**

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 1}$$

1. **Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :**
$$f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$$
Déterminer le sens de variation de f sur $]-1\,;\,+\infty[$.
2. **Calculer u_1.**
3. **Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:**
$$1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$$
4. **En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.**

<u>Corrigé</u>





1. f est quotient de deux fonction affines donc elle est dérivable sur son ensemble de définition, c'est-à-dire sur $]-1\,;\,+\infty[$
$$f(x) = \frac{3x+1}{x+1}$$
Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$u(x) = 3x+1 \quad u'(x) = 3$
$v(x) = x+1 \quad v'(x) = 1$
$$f'(x) = \frac{3(x+1) - 1(3x+1)}{(x+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{3x+3-3x-1}{(x+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$
Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est (strictement) croissante sur $]-1;+\infty[$.

2. On a :
$$u_1 = \frac{3u_0+1}{u_0+1} = \frac{3(1)+1}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$
$\boldsymbol{u_1 = 2}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition
$$P_n : « 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3 »$$
• <u>initialisation</u>
On a : $1 \leqslant 1 \leqslant 2 \leqslant 3$, or $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$, donc $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$
par conséquent P_0 est vraie.

• <u>hérédité</u>
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : «$1 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$ » est vraie (hypothèse de récurrence) et démontrons que P_{k+1} : « $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 3$ » est vraie.
Les nombres 1, u_k, u_{k+1} et 3 appartiennent tous à l'intervalle $]-1;+\infty[$ sur lequel f est croissante donc conserve le sens de la relation d'ordre.
On a : $1 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$ donc : $f(1) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(3)$
Or,
$$f(1) = \frac{3(1)+1}{1+1} = \frac{4}{2} = 2 \qquad f(u_k) = \frac{3u_k+1}{u_k+1} = u_{k+1}$$
$$f(u_{k+1}) = \frac{3u_{k+1}+1}{u_{k+1}+1} = u_{k+2} \quad f(3) = \frac{3(3)+1}{3+1} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$
On a obtient donc : $2 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 2{,}5$
donc : $1 \leqslant 2 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 2{,}5 \leqslant 3$ d'où : $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 3$
par conséquent P_{k+1} est vraie.

<u>Conclusion</u>
Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3}$.

4. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante
- pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 3$ donc (u_n) est majorée par la constante 3

Il est important de traiter séparément les deux conséquences de « $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ ».

La suite (u_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone elle est convergente.
Notons ℓ sa limite et rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 1} \quad (*)$$

On a d'une part : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{N \to +\infty} u_N = \ell$$

et d'autre part, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} (3u_n + 1) = 3\ell + 1 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} (u_n + 1) = \ell + 1$$

donc par limite d'un quotient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{3\ell + 1}{\ell + 1}$$

Par passage à la limite de l'égalité $(*)$ on obtient :

$$\ell = \frac{3\ell + 1}{\ell + 1}$$
$$\ell(\ell + 1) = 3\ell + 1$$
$$\ell^2 + \ell - 3\ell - 1 = 0$$
$$\ell^2 - 2\ell - 1$$

donc ℓ est solution de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$.
$x^2 - 2x - 1$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$, de discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 4 + 4 = 8$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$\Delta > 0$ donc $x^2 - 2x - 1$ admet deux racines réelles distiinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 - 2\sqrt{2}}{2(1)} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{2} = 1 - \sqrt{2} \approx -0{,}4$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+2 + 2\sqrt{2}}{2(1)} = \frac{2(1 + \sqrt{2})}{2} = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}4$$

Or, par passage à la limite des inégalités de la question **3.** on obtient $1 \leqslant \ell \leqslant 3$ donc x_1 est rejeté et x_2 est accepté.
Finalement : $\boldsymbol{\ell = 1 + \sqrt{2}}$.

D14 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\boldsymbol{u_n = \frac{4n + 3}{n + 1}}$$

En revenant à la définition d'une limite démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

Corrigé

Question :
« $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, si\ n \geqslant n_0$ alors $|u_n - 4| < \varepsilon$ » ?

$$|u_n - 4| = \left|\frac{4n + 3}{n + 1} - 4\right| = \left|\frac{4n + 3}{n + 1} - \frac{4(n + 1)}{n + 1}\right| = \left|\frac{4n + 3 - 4(n + 1)}{n + 1}\right|$$
$$= \left|\frac{4n + 3 - 4n - 4}{n + 1}\right| = \left|\frac{-1}{n + 1}\right| = \left|-\frac{1}{n + 1}\right|$$

Or, pour $x < 0$ on a : $|x| = -x$ donc :

$$\left|-\frac{1}{n + 1}\right| = -\left(-\frac{1}{n + 1}\right) = \frac{1}{n + 1}$$

Dire : $|u_n - 4| < \varepsilon$ revient donc à dire : $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, c'est-à-dire $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

ou encore $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Notons n_0 le premier entier naturel strictement plus grand que $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$: on a : $n \geqslant n_0$ et $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ donc $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

donc $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ puis $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ et enfin $|u_n - 4| < \varepsilon$.

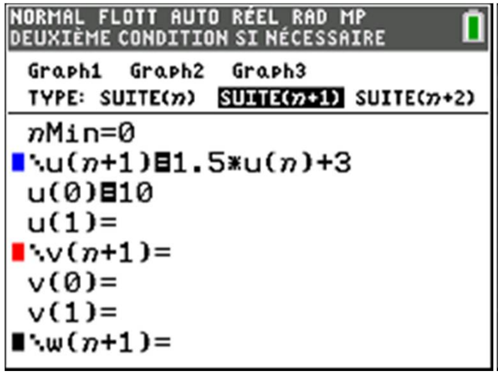
Résumons
$\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, n_0 est le plus petit entier naturel strictement plus grand que $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - 4| < \varepsilon$
ce qui montre que $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4}$.

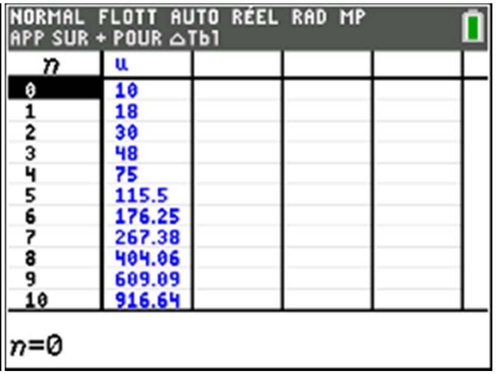
D15 **On pose $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1,5u_n + 3$.**

1. **Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.**
2. **Écrire un programme Python qui demande à l'utilisateur d'entrer un réel A puis affiche le premier entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n, si $n \geqslant n_0$ alors $u_n > A$. (en admettant qu'un tel n_0 existe)**
3. **Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 16 \times 1,5^n - 6$.**
4. **En déduire que :**
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $u_n > A$

<u>Corrigé</u>

$u_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1,5u_n + 3$





1. **Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.**

$$u_1 = 1,5 \times u_0 + 3 = 1,5 \times 10 + 3 = 15 + 3 = 18$$
$$\boldsymbol{u_1 = 18}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition P_n : « $u_n \leqslant u_{n+1}$ »

<u>initialisation</u>
On a : $10 \leqslant 18$, or $u_0 = 10$ et $u_1 = 18$,donc $u_0 \leqslant u_1$: P_0 est vraie.

<u>hérédité</u>
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $u_k \leqslant u_{k+1}$ » est vraie (hypothèse de récurrence), montrons que P_{k+1} : « $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$ » est vraie.
On a : $u_k \leqslant u_{k+1}$ (hypothèse de récurrence)
en multipliant par $1,5 > 0$ on obtient : $1,5u_k \leqslant 1,5u_{k+1}$
puis en ajoutant 3 : $1,5u_k + 3 \leqslant 1,5u_{k+1} + 3$
c'est-à-dire : $u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$ donc P_{k+1} est vraie.

<u>Conclusion</u>
Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n$ est vraie autrement dit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$
ce qui montre que la suite (u_n) est croissante

2. **Programme Python qui demande à l'utilisateur d'entrer un réel A puis affiche le premier entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $u_n > A$ (en admettant qu'un tel n_0 existe)**

```
A=eval(input("réel A="))
U=10
n=0
while U<=A:
    U=1.5*U+3
    n=n+1
print("n0=",n)
```

3. **Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 16 \times 1,5^n - 6$.**

$\forall n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition P_n : « $u_n = 16 \times 1,5^n - 6$ »

• <u>initialisation</u>
$16 \times 1,5^0 - 6 = 16 \times 1 - 6 = 10 = u_0$: P_0 est vraie

• <u>hérédité</u>
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $u_k = 16 \times 1,5^k - 6$ » est vraie (hypothèse de récurrence), montrons que P_{k+1} : « $u_{k+1} = 16 \times 1,5^{k+1} - 6$ » est vraie.
On a : $u_k = 16 \times 1,5^k - 6$ (H.R.).
En multipliant pat 1,5 on obtient :
$1,5u_k = 1,5(16 \times 1,5^k - 6)$
$1,5u_k = 16 \times 1,5^{k+1} - 1,5 \times 6$
$1,5u_k = 16 \times 1,5^{k+1} - 9$

Puis en ajoutant 3 :
$1{,}5u_k + 3 = 16 \times 1{,}5^{k+1} - 9 + 3$
$u_{k+1} = 16 \times 1{,}5^{k+1} - 6$
Par conséquent P_{k+1} est vraie.

Conclusion
Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie autrement dit :

$$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 16 \times 1{,}5^n - 6}$$

4. **En déduire que :**
$\forall A \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $u_n > A$.

$1{,}5 > 1$ or, si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}5^n = +\infty$
d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (16 \times 1{,}5^n) = +\infty$ puis par limite d'une différence :
$\lim\limits_{n \to +\infty} (16 \times 1{,}5^n - 6) = 0$ autrement dit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
En revenant à la définition de la divergence vers $+\infty$ on obtient :
$\forall A \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $u_n > A$
ce qui est précisément ce que nous devions justifier.

D16 [d'après bac]

On pose $u_0 = v_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$.
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$ et $v_n \geqslant 1$.

1. **Calculer u_1 et v_1.**
2. **Déterminer le sens de variation de (u_n).**
3. **Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n+1$.**
   En déduire la limite de (u_n).
4. **Justifier que : « pour tout réel A, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $u_n \geqslant A$ ». Le programme Python suivant demande d'entrer A puis détermine le plus petit entier naturel n_0 :**

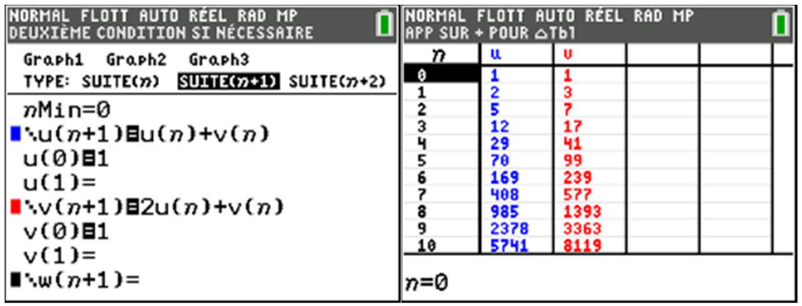
```
1 U,V=1,1
2 A=eval(input("A="))
3 n=0
4 while
5     U,V=
6     n=n+1
7 print("n0=",n)
```

Recopier sur la copie, en les complétant, les lignes 4 et 5 puis à l'aide de ce programme, déterminer le plus petit n_0 correspondant à $A = 1\,000\,000$.

Corrigé

$u_0 = v_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + v_n \;\; et \;\; v_{n+1} = 2u_n + v_n$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$ et $v_n \geqslant 1$



1. **Calculer u_1 et v_1.**
   $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = \mathbf{2}$ $\qquad v_1 = 2u_0 + v_0 = 2(1) + 1 = \mathbf{3}$
2. **Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).**
   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = u_n + v_n - u_n = v_n \geqslant 1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.
3. **Démontrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n+1$.**
   En déduire la limite de (u_n).
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la proposition P_n : « $u_n \geqslant n+1$ ».

   • <u>initialisation</u>
   $u_0 = 1$ et $0 + 1 = 1$ donc $u_0 \geqslant 0 + 1$, P_0 est vraie

   • <u>hérédité</u>
   Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que P_k : « $u_k \geqslant k+1$ » est vraie (hypothèse de récurrence), montrons que P_{k+1} : « $u_{k+1} \geqslant k+2$ » est vraie.
   On a : $u_k \geqslant k+1$ (hypothèse de récurrence) et $v_k \geqslant 1$.
   En ajoutant membre à membre, on obtient : $u_k + v_k \geqslant (k+1) + 1$,
   c'est-à-dire : $u_{k+1} \geqslant k+2$, donc P_{k+1} est vraie.

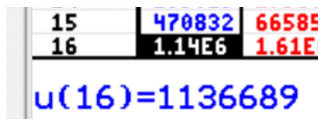
   <u>conclusion</u>
   Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, autrement dit : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n \geqslant n+1}$.

   Par limite d'une somme on a immédiatement : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$.

   On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n+1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty \end{cases}$ donc d'après le théorème de comparaison on en déduit : $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

4. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$, en revenant à la définition d'une limite on obtient
   « pour tout réel A, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $u_n \geqslant A$ ».
   <u>Ligne 4</u> `while U<=A:` $\qquad$ <u>Ligne 5</u> `U,V=U+V,2*U+V`

   Pour $A = 1\,000\,000$ on obtient $n_0 = 16$.
   vérification avec la calculatrice :



D17 [d'après bac]

On pose $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

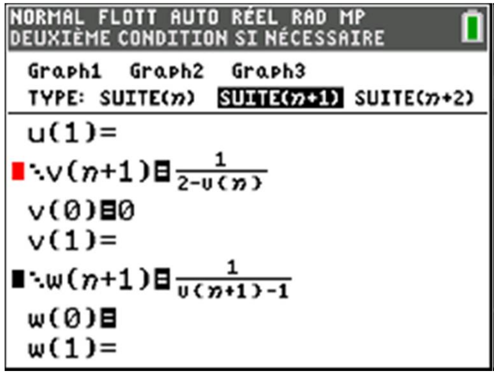
$$v_{n+1} = \frac{1}{2 - v_n}$$

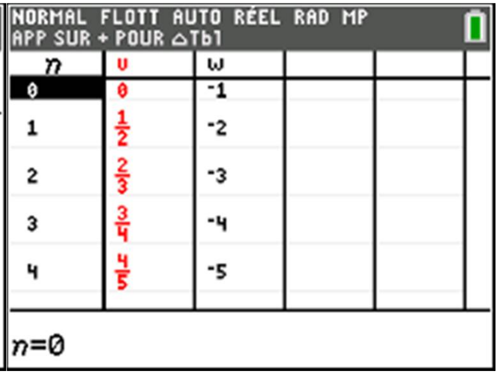
1. a. **Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 < v_n < 1$.**
   b. **Démontrer que, pour tout entier naturel n :**
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 1)^2}{2 - v_n}$$
   c. **Démontrer que (v_n) est convergente.**
2. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :**
   $$w_n = \frac{1}{v_n - 1}$$
   Démontrer que (w_n) est arithmétique, en préciser la raison et le premier terme, exprimer w_n puis v_n en fonction de n.
3. **Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.**
4. **Justifier que : « pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $|v_n - 1| < \varepsilon$ ».**
   Déterminer le plus petit de ces entiers n_0 en fonction de ε.

Corrigé

On pose $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{2 - v_n}$$





1. a. **Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 < v_n < 1$.**

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on considère la proposition

$$P_n : « 0 < v_n < 1 ».$$

• initialisation (pour $n = 1$ et non $n = 0$)

$$v_1 = \frac{1}{2 - v_0} = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

On a : $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $0 < v_1 < 1$: P_1 est vraie.

• hérédité

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que P_k : « $0 < v_k < 1$ » est vraie (hypothèse de récurrence) et montrons que P_{k+1} : « $0 < v_{k+1} < 1$ » est vraie.

On a : $0 < v_k < 1$ (H.R.) donc en multipliant pat $-1 < 0$:

$0 > -v_k > -1$, puis en ajoutant 1 : $2 > 2 - v_n > 1$

Les nombre $\frac{1}{2}$, $2 - v_n$ et 1 sont non nuls et de même signe donc en prenant peurs inverses on inverse le sens de la relation d'ordre :

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2 - v_n} < \frac{1}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2 - v_n} < 1$$

$$0 < \frac{1}{2} < v_{k+1} < 1$$

$$0 < v_{k+1} < 1$$

P_{k+1} est vraie.

Conclusion

Il résulte des deux points précédents et du principe de récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, P_n est vraie, autrement dit :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{0 < v_n < 1}$.

b. **Démontrer que, pour tout entier naturel n :**

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 1)^2}{2 - v_n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2 - v_n} - v_n = \frac{1}{2 - v_n} - \frac{v_n(2 - v_n)}{2 - v_n}$$

$$= \frac{1 - v_n(2 - v_n)}{2 - v_n} = \frac{1 - 2v_n + {v_n}^2}{2 - v_n} = \frac{(v_n)^2 - 2(v_n)(1) + (1)^2}{2 - v_n}$$
$$= \frac{(v_n - 1)^2}{2 - v_n}$$
On a donc bien :
$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 1)^2}{2 - v_n}}$$

c. **Démontrer que la suite (v_n) est convergente.**

• on a montré en a. que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < v_n < 1$, et comme $v_0 = 0$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant v_n < 1$ donc la suite (v_n) est majorée par la constante 1

• On a montré en b. que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 1)^2}{2 - v_n}$$
Or, $(v_n - 1)^2 \geqslant 0$ et $2 - v_n > 0$ donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ donc la suite (v_n) est croissante

La suite (v_n) est croissante et majorée donc d'après le théorème de convergence monotone **elle est convergente**.

2. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :**
$$\boldsymbol{w_n = \frac{1}{v_n - 1}}$$
Démontrer que (w_n) est arithmétique, en préciser la raison et le premier terme, exprimer w_n puis v_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1} - 1} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1}{\frac{1}{2 - v_n} - 1} - \frac{1}{v_n - 1}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{2 - v_n} - \frac{2 - v_n}{2 - v_n}} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1}{\frac{1 - (2 - v_n)}{2 - v_n}} - \frac{1}{v_n - 1}$$
$$= \frac{2 - v_n}{-1 + v_n} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{2 - v_n}{v_n - 1} - \frac{1}{v_n - 1} = \frac{1 - v_n}{v_n - 1} = -1$$

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n = -1$ et -1 est une constante donc la suite $(\boldsymbol{w_n})$ **est arithmétique de raison (-1).**

On a :
$$w_0 = \frac{1}{v_0 - 1} = \frac{1}{0 - 1} = -1$$
et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$w_n = w_0 + nr = -1 + n \times (-1) = -n - 1$$
Résumons : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{w_n = -n - 1}$.

Or
$$w_n = \frac{1}{v_n - 1}$$
$$v_n - 1 = \frac{1}{w_n}$$
$$v_n = \frac{1}{w_n} + 1 = 1 - \frac{1}{n + 1}$$
Résumons :
$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{v_n = 1 - \frac{1}{n + 1}}$$

3. **Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.**

Justifier que : « pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $|v_n - 1| < \varepsilon$ ».
Déterminer le plus petit de ces entiers n_0 en fonction de ε.

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n + 1) = +\infty$ donc par limite d'un quotient
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n + 1} = 0$$
puis par limite d'une différence :
$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n + 1}\right) = 1$$
Conclusion : $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1}$.

En revenant à la définition d'une limite, et du fait que (u_n) converge vers 1, on peut affirmer que : « pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant n_0$ alors $|v_n - 1| < \varepsilon$ ».

Recherche

$$|v_n - 1| = \left|1 - \frac{1}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

dire que $|v_n - 1| < \varepsilon$ revient à dire $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$

$$n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Notons n_0 le plus petit entier naturel strictement plus grand que $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$.

On a : $n \geqslant n_0$ et $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ donc $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, donc $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

On obtient alors :

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\left|-\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$[1 - \frac{1}{n+1} - 1| < \varepsilon$$

$$|v_n - 1| < \varepsilon$$

On a donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ (n_0 plus petit entier naturel strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ convient) tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |v_n - 1| < \varepsilon$.