CS 08 Spécialité maths Mardi 2 Avril 2024 **groupe Thiaude**
Calculatrice autorisée en mode EXAMEN durée = 50 min

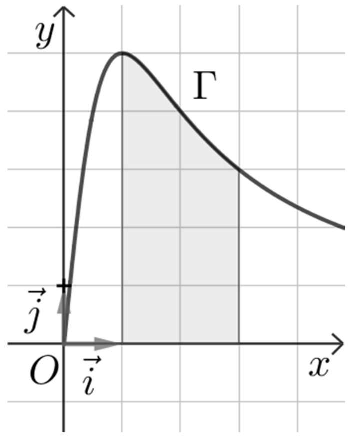
Exercice 1 [3 pts]

Calculer : $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$.

Exercice 2 [4 pts : 0,5 pt + 3,5 pts]

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{10x}{x^2+1}$$



On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, $\mathcal{D}$ le domaine délimité par Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=3$ respectivement.

1. Par simple lecture graphique un élève affirme que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est comprise entre 7 et 10 $u.a$.
   Expliquer très brièvement sa méthode.
2. Déterminer la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en déduire un encadrement de $\ln(5)$.

Exercice 3 [8 pts : 1 pts + 2 pts + 1 pts + 4 pts] d'après bac

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$.

1. Calculer $I_0=\int_0^1 e^{1-x}\,dx$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, I_{n+1}=(n+1)I_n-1$.
3. Calculer I_1 et I_2.
4. **a.** Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $0\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n$.
   b. Justifier que la suite (I_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 4 [5 pts : 3 pts + 2 pts]

1. On pose :
$$A=\int_0^{\pi} e^x\cos(2x)\,dx \quad \text{et} \quad B=\int_0^{\pi} e^x\sin(2x)\,dx$$
   À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que :
$$A=\frac{e^{\pi}-1}{5}$$
2. On admet que, pour tout réel x : $\cos^2(x)-\sin^2(x)=\cos(2x)$ et on pose :
$$I=\int_0^{\pi} e^x\cos^2(x)\,dx \quad \text{et } K=\int_0^{\pi} e^x\sin^2(x)\,dx$$
   a. Calculer $I+K$.
   b. Déterminer la valeur de $I-K$.
   c. Déduire de **a.** et **b.** la valeur de I.

Corrigé

Exercice 1

Calculer : $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$

Pour tout $x \in [0;\ln 3\,]$ on pose : $u(x) = e^x + 1$, d'où : $u'(x) = e^x$, on a alors pour tout $x \in [0;\ln 3\,]$:

$$\frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{u'(x)}{\big(u(x)\big)^2}$$

Or, une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$, u ne s'annulant pas sur l'intervalle considéré, est $-\frac{1}{u}+k$, k constante réelle, donc en notant F l'une des primitives de $x \mapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ sur $[0;\ln 3\,]$ on a :

$$F(x) = -\frac{1}{e^x+1}$$

Comme de plus $x \mapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ est continue sur $[0;\ln 3\,]$ on en déduit :

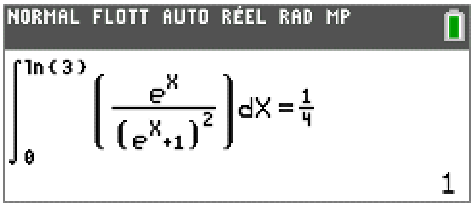
$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx = [F(x)]_0^{\ln 3}$$

On a :

$$[F(x)]_0^{\ln 3} = \left[-\frac{1}{e^x+1}\right]_0^{\ln 3} = -\frac{1}{e^{\ln 3}+1} + \frac{1}{e^0+1} = -\frac{1}{3+1} + \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

Conclusion

$$\boldsymbol{\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}}$$



Exercice 2

$\forall x \in [0;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{10x}{x^2+1}$

1. On peut reporter 7 carrés entiers d'aire 1 $u.a.$ à l'intérieur de la zone grisée et la zone grisée est contenue dans un rectangle formé de 10 carrés entiers d'aire 1 $u.a.$ donc : $\boldsymbol{7 < \mathcal{A}ire\ de\ \mathcal{D} < 10.}$

2. **Valeur exacte de l'aire du domaine $\mathcal{D}$**

   Pour tout $x \in [0;+\infty[,\ f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$; f est continue sur $[1;3]$ donc : $\int_1^3 f(x)\,dx = [F(x)]_1^3$ où F est l'une des primitives, au choix, de f sur $[1;3]$.
   Posons $u(x) = x^2+1$, d'où $u'(x) = 2x$. On a :

   $$f(x) = 5 \times \frac{2x}{x^2+1} = 5 \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$

   Or, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$, $u > 0$ sur l'intervalle considéré, est $\ln(u) + k$ avec k constante réelle, donc l'une des primitives de f sur $[1;3]$ est F telle que, pour tout $x \in [1;3]$, $F(x) = 5\ln(x^2+1)$.
   Comme f est continue sur $[1;3]$ on a : $\int_1^3 f(x)\,dx = [F(x)]_1^3$.
   Or :
   $[F(x)]_1^3 = [5\ln(x^2+1)]_1^3 = 5\ln(3^2+1) - 5\ln(1^2+1) = 5\ln(10) - 5\ln(2) = 5\ln(2\times 5) - \ln(2)$
   $= 5(\ln(2)+\ln(5)) - 5\ln(2) = 5\ln(2) + 5\ln(5) - 5\ln(2) = 5\ln(5)$.

   L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est : $\boldsymbol{5\ln(5)\ u.a.}$

Encadrement de $\ln(5)$
On a : $aire\ de\ \mathcal{D} = 5\ln 5\ u.a.$ et $7\ u.a. < aire\ de\ \mathcal{D} < 10\ u.a$, donc :

$$7 < 5\ln(5) < 10 \Leftrightarrow \frac{7}{5} < \ln(5) < \frac{10}{5} \Leftrightarrow \frac{14}{10} < \ln(5) < 2 \Leftrightarrow 1{,}4 < \ln(5) < 2$$

<u>Conclusion</u> $\mathbf{1,4 < \ln(5) < 2}$.

La calculatrice donne $\ln(5) \approx 1{,}61$ ce qui est en accord avec la conclusion précédente.

<u>Exercice 3</u>

$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{I_n} = \int_0^1 \boldsymbol{x^n e^{1-x}\,dx}$

1. **Calculer $\boldsymbol{I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx}$.**
La fonction $x \mapsto e^{1-x}$ est continue sur $[0;1]$ et l'une de ses primitives est $x \mapsto -e^{1-x}$ donc :

$$\int_0^1 e^{1-x}\,dx = [-e^{1-x}]_0^1 = -e^{1-1} + e^{1-0} = -e^0 + e = e - 1$$

On a donc : $\boldsymbol{I_0 = e - 1}$.

2. **À l'aide d'une intégration par parties, démontrer : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{I_{n+1} = (n+1)I_n - 1}$.**
Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$ et $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x}\,dx$.
Intégrons par parties $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x}\,dx$.
On pose :

$$u(x) = x^{n+1} \qquad v'(x) = e^{1-x}$$
$$u'(x) = (n+1)x^n \qquad v(x) = -e^{1-x} \text{ (convient)}$$

Les fonctions u' et v' sont continues sur $[0;1]$ donc d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx$$

Donc :

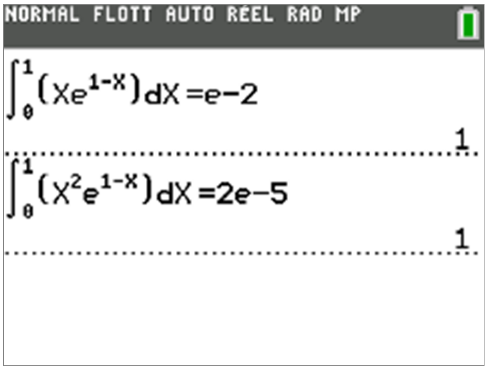
$$\int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}\,dx = [-x^{n+1}e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x}\,dx$$
$$= -1^{n+1}e^{1-1} + 0^{n+1}e^{1-0} + \int_0^1 (n+1)x^n e^{1-x}\,dx$$
$$= -1 \times 1 + 0 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$$

On a donc :

$$\int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}\,dx = -1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$$

autrement dit : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.
On a donc bien : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{I_{n+1} = (n+1)I_n - 1}$.

3. **Calculer $\boldsymbol{I_1}$ et $\boldsymbol{I_2}$.**
En utilisant la relation de récurrence précédente on obtient :
• pour $n = 0$: $I_1 = (0+1)I_0 - 1 = I_0 - 1 = e - 1 - 1 = e - 2$
• pour $n = 1$: $I_2 = (1+1)I_1 - 1 = 2I_1 - 1 = 2(e-2) - 1 = 2e - 4 - 1 = 2e - 5$
<u>Résumons</u> $\boldsymbol{I_1 = e - 2}$ et $\boldsymbol{I_2 = 2e - 5}$.



$I_0 = e - 1 \approx 1{,}718$
$I_1 = e - 2 \approx 0{,}718$
$I_2 = 2e - 5 \approx 0{,}437$
La suite (I_n) semble être décroissante …

4. a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'une part, pour tout $x \in [0;1]$: $x^{n+1} \geqslant 0$ et $e^{1-x} > 0$, donc : $x^{n+1}e^{1-x} \geqslant 0$.
En intégrant dans l'ordre croissant des bornes, on obtient : $\int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}\,dx \geqslant 0$ i.e. : $0 \leqslant I_{n+1}$ $(*)$.
D'autre part :

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx - \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}\,dx = \int_0^1 (x^n e^{1-x} - x^{n+1}e^{1-x})\,dx$$
$$= \int_0^1 (1 \times x^n e^{1-x} - x \times x^n e^{1-x})\,dx = \int_0^1 (1-x)x^n e^{1-x}\,dx$$

Or, sur $[0;1]$ on a : $x^n \geqslant 0$, $e^{1-x} > 0$ et $1 - x \geqslant 0$ donc : $x^n e^{1-x}(x-1) \geqslant 0$.
En intégrant dans l'ordre croissant des bornes, on obtient : $\int_0^1 (x-1)x^n e^{1-x}\,dx \geqslant 0$.
On a donc : $I_n - I_{n+1} \geqslant 0$ autrement dit $I_n \geqslant I_{n+1}$ ou encore : $I_{n+1} \leqslant I_n$ $(**)$.

Il résulte de $(*)$ et $(**)$ que : $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

b. Justifions que (I_n)est convergente.

Il résulte du **a.** que :
$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \leqslant I_n$ donc la suite (I_n) est décroissante.
$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_n$ donc la suite (I_n) est minorée par la constante 0.
La suite (I_n) est décroissante et minorée donc d'après le théorème de convergence monotone elle est convergente.

Déterminons la limite de I_n.

Notons ℓ la limite finie de la suite (I_n).
Soit $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence obtenue à la question **2.** : $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$,
s'écrit aussi : $I_{n+1} + 1 = (n+1)I_n$, ou encore : $I_n = \frac{I_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{I_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

On a d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = \lim\limits_{N\to+\infty} I_N = \ell$
donc, par limite d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{n+1} = 0$
et d'autre part on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N} = 0$.
Donc par limite d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{I_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) = 0$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{I_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} = I_n$ donc la limite précédente s'écrit aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 4

1. On pose :

$$\boldsymbol{A = \int_0^{\pi} e^x \cos(2x)\,dx \quad \text{et} \quad B = \int_0^{\pi} e^x \sin(2x)\,dx}$$

À l'aide d'une double intégration par parties, montrer que :

$$\boldsymbol{A = \frac{e^{\pi} - 1}{5}}$$

Intégrons par parties $A = \int_0^{\pi} e^x \cos(2x)\,dx$

On pose : $u(x) = \cos(2x) \qquad v'(x) = e^x$

$u'(x) = -2\sin(2x) \quad v(x) = e^x \ (convient)$

u' et v' sont continues sur $[0\,;\pi]$ donc on peut effectuer une intégration par parties :

$$\int_0^{\pi} u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \cos(2x)\,e^x\,dx \ = [e^x\cos(2x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -2\sin(2x)\,e^x\,dx$$

$$A = e^{\pi}\cos(2\pi) - e^0\cos(0) + 2\int_0^{\pi} \sin(2x)\,e^x\,dx$$

$$A = e^{\pi} - 1 \times 1 + 2\int_0^{\pi} e^x \sin(2x)\,dx$$

$$A = e^{\pi} - 1 + 2B \ \ (*)$$

Intégrons par parties $B = \int_0^{\pi} e^x \sin(2x)\,dx$

On pose : $u(x) = \sin(2x) \qquad v'(x) = e^x$

$u'(x) = 2\cos(2x) \quad v(x) = e^x$ (convient)

u' et v' sont continues sur $[0\,;\pi]$ donc on peut effectuer une intégration par parties :

$$\int_0^{\pi} u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin(2x)\,e^x\,dx \ = [e^x\sin(2x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\cos(2x)\,e^x\,dx$$

$$B = e^{\pi}\sin(2\pi) - e^0\sin(0) - 2\int_0^{\pi} \cos(2x)\,e^x\,dx$$

$$B = e^{\pi} \times 0 - 1 \times 0 - 2A$$

$$B = -2A$$

Remplaçons dans $(*)$:

$$A = e^{\pi} - 1 + 2(-2A) \Leftrightarrow A = e^{\pi} - 1 - 4A \Leftrightarrow A + 4A = e^{\pi} - 1 \Leftrightarrow 5A = e^{\pi} - 1 \Leftrightarrow A = \frac{e^{\pi} - 1}{5}$$

On a donc bien : $\boldsymbol{A = \frac{e^{\pi} - 1}{5}}$

2. On admet que, pour tout réel $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)}$ et on pose :

$$\boldsymbol{I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2(x)\,dx \ \ \text{et}\ K = \int_0^{\pi} e^x \sin^2(x)\,dx}$$

a. Calculer $\boldsymbol{I + K}$.

$$I + K = \int_0^{\pi} e^x\cos^2(x)\,dx + \int_0^{\pi} e^x\sin^2(x)\,dx \ = \int_0^{\pi} (e^x\cos^2(x) + e^x\sin^2(x))dx$$

$$= \int_0^{\pi} e^x(\cos^2(x) + \sin^2(x))dx = \int_0^{\pi} e^x \times 1\,dx = [e^x]_0^1 = e^{\pi} - e^0 = e^{\pi} - 1$$

Finalement : $\boldsymbol{I + K = e^{\pi} - 1}$

b. Déterminer la valeur de $\boldsymbol{I-K}$.

$$I-K=\int_0^{\pi} e^x\cos^2(x)\,dx+\int_0^{\pi} e^x\sin^2(x)\,dx\ =\int_0^{\pi}(e^x\cos^2(x)+e^x\sin^2(x))dx$$
$$=\int_0^{\pi} e^x\,(\cos^2(x)-\sin^2(x))dx=\int_0^{\pi} e^x\times\cos(2x)\,dx=A=\frac{e^{\pi}-1}{5}$$

Finalement : $\boldsymbol{I-K=\dfrac{e^{\pi}-1}{5}}$ $(**)$.

c. Déduire de a. et b. la valeur de $\boldsymbol{I}$.

On a : $I+K=e^{\pi}-1$ donc $K=e^{\pi}-1-I$.

Remplaçons dans $(**)$:

$$I-(e^{\pi}-1-I)=\frac{e^{\pi}-1}{5}\Leftrightarrow I-e^{\pi}+1+I=\frac{e^{\pi}-1}{5}\Leftrightarrow 2I=\frac{e^{\pi}-1}{5}+e^{\pi}-1$$
$$\Leftrightarrow 2I=\frac{e^{\pi}-1+5(e^{\pi}-1)}{5}\Leftrightarrow 2I=\frac{6e^{\pi}-6}{5}\Leftrightarrow I=\frac{3e^{\pi}-3}{5}$$

<u>Conclusion</u> :

$$\boldsymbol{I=\frac{3e^{\pi}-3}{5}}$$